

## Формирование и усиление сигналов

УДК 621.398.97

### Ангармонизм колебаний в распределённых системах

**Семенов Николай Сергеевич**

аспирант ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ»

*E-mail:* semenov\_nick@mail.ru.

**Белов Леонид Алексеевич**

кандидат технических наук, профессор,

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ».

*E-mail:* belovla@gmail.com.

*Адрес:* 111250, Россия, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14.

*Аннотация:* Рассмотрены свободные затухающие квазипериодические колебания в распределённой системе с малыми потерями на примере струны. Показано, что в таких системах проявляется ангармонизм обертонов, который выражается в некратности значений собственных частот обертонов частоте основного тона. Проведены экспериментальные измерения значений частоты обертонов и параметра их ангармонизма обертона с использованием кепстрального преобразования, которые выявили немонотонность их зависимости от номера гармоники. Предложено объяснение механизма появления ангармонизма и несимметрии огибающей колебаний за счёт дисперсии скорости распространения колебаний на обертонах вдоль пространственной координаты.

*Ключевые слова:* квазипериодические сигналы; ангармонизм обертонов; дисперсия скорости распространения волн; кепстр; краевые условия; распределённая колебательная система; струна.

### Введение

Квазипериодические сигналы несинусоидальной во времени формы с высокой стабильностью частоты повторения используются в радиотехнических [1] и физико-технических приложениях. Они отличаются многооктавной полосой занимаемых частот, значительным количеством обертонов с сопоставимыми амплитудами и медленным по сравнению с периодом основного тона изменением формы колебаний. Такие сигналы формируются в колебательных системах с малыми потерями и распределёнными параметрами, например, в несогласованной на концах двухпроводной линии передачи [2], в тонкоплёночном СВЧ-резонаторе на пьезоэлектрической подложке [3], в многочастотном резонаторе на объёмных акустических волнах (High-overtone Bulk Acoustic Resonator, HBAR) [4], в оптическом резонаторе, в механической колебательной системе типа упругой струны [5].

Анализ процессов в таких системах осложнён необходимостью учёта дисперсии фазовой скорости для волн каждого из обертонов вдоль пространственной координаты. Известен [6] феномен *ангармонизма обертонов*, который состоит в изменении собственной частоты высших гармоник колебания по сравнению со значениями, кратными частоте основного тона. Несмотря на общность описания процессов в системах с различной физической средой распространения волн, в литературе имеются лишь отдельные сведения о характере колебательных процессов применительно к простейшим структурам. Однако анализ причин появления ангармонизма отсутствует.

**Цель** данной работы состоит в систематизации разрозненных материалов о колебаниях сложной формы в распределённых колебательных системах с малыми потерями, в выявлении особенностей физико-математического описания динамики волновых процессов с ан-

гармонизмом обертонов и в изложении результатов измерений их параметров на основе разработанного в [7] модифицированного кепстрального алгоритма на примере колебаний струны.

**Математическая модель**

В качестве примера одномерной распределённой колебательной системы с малыми потерями рассмотрим однородную струну из упругого материала длиной  $L$  с малым диаметром  $d \ll L$ , закреплённую вдоль оси  $x$  в точках  $x = 0$  и  $x = L$ . После начального отклонения точки с координатой  $x_0$  на расстояние  $y_0 \ll L$  в такой системе происходят свободные поперечные колебания  $y(x, t)$  в плоскости  $(x, y)$ , которые описываются волновым уравнением [2, 5, 7]:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + 4\pi\sigma \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{(2\pi f_1)^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

где  $f_1 = a/2L$  – частота основного тона;  $a = \sqrt{T/\rho}$  – коэффициент, характеризующий упругие свойства материала с натяжением  $T$  и плотностью  $\rho$ ;  $\sigma \ll 1$  – параметр затухания.

Если в качестве крайних условий в (1) использовано жёсткое закрепление концов струны, при котором  $y(0, t) = y(L, t) = 0$ , то в соответствии с [2] собственные частоты колебательной системы в точности кратны частоте основного тона  $f_n = n f_1, n \in (1, 2, 3, \dots)$ . Если же имеет место упругое закрепление концов струны, то по [8] крайние условия принимают вид

$$\begin{cases} \frac{dy(x, 0)}{dx} = ay(x, 0); \\ \frac{dy(x, L)}{dx} = -ay(x, L). \end{cases} \tag{2}$$

В результате учёта (2) появляется зависимость фазовой скорости волн, бегущих вдоль колебательной системы для  $x \in (0, L)$  от их частоты следования (дисперсия). Разделением переменных в (1) можно представить его решение (без учёта постоянной составляющей, не

влияющей на распространение акустических волн) в виде следующего ряда по собственным частотам  $f_n$  (обертонам):

$$\frac{y(t, x)}{y_0} = \left[ \frac{2}{\left(\frac{x_0}{L}\right)\left(1 - \frac{x_0}{L}\right)} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sin\left(\pi \frac{x}{L} n\right) \times [A_n \cos(2\pi f_n t) + B_n \sin(2\pi f_n t)] \times \exp\left(-\frac{t}{T(n)}\right) \right\}, \tag{3}$$

где  $T(n)$  – постоянная времени затухания каждого из обертонов. В [8] доказано, что значения собственных частот  $f_n$  в этом случае являются положительными решениями уравнения вида

$$\operatorname{tg} x = 2aL \frac{x}{x^2 - (aL)^2}, \tag{4}$$

где  $x = 2\pi f L / v_{\phi n}$ ;  $v_{\phi n}$  – фазовая скорость  $n$ -го обертона. Графическое решение этого уравнения показано на рис. 1.

В полученной последовательности значений  $\{x_n/\pi\}$  нормированный интервал между соседними собственными частотами  $\Delta_n = (x_{n+1} - x_n)/\pi$  монотонно уменьшается, приближаясь к единице. В этом проявляется ангармонизм обертонов в рассмотренной системе.

В [9] для задачи о собственных колебаниях струны с одним жёстко и другим упруго закреплёнными концами получено близкое к (4) уравнение вида  $\operatorname{tg} x = -(T/k)x$ , где  $k$  – коэффициент упругой жёсткости. Для различных значений длины струны  $L$  и её натяжения  $T$  в этой работе показано, что ангармонизм существенно проявляется для нескольких ( $n \leq 6$ ) первых обертонов.

Уравнением типа (4) определяются в [2] ангармонические значения собственных частот электромагнитных колебаний для двухпровод-

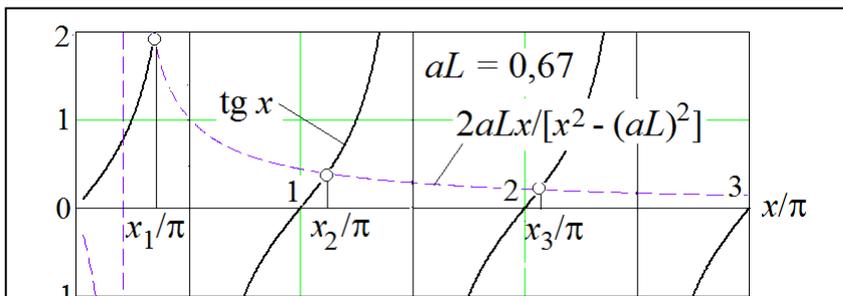


Рис 1. Графическое решение уравнения (4) для нахождения собственных частот системы

ной линии без потерь с волновым сопротивлением  $w$ , короткозамкнутой на одном конце и с подключённой на противоположном конце ёмкостью  $C_{\text{вх}}$  с реактивным сопротивлением  $1/(2\pi f C_{\text{вх}})$ .

В [10] установлено, что для высокооборотной гладкой струны при учёте конечного значения упругой жёсткости материала имеет место следующее аппроксимирующее выражение для собственных частот обертонов:

$$f_n = n f_1 \sqrt{1 + B n^2}, \quad (5)$$

где  $B = \pi^3 d^4 E / (128 T L^2)$  – параметр ангармонизма, численное значение которого определяется диаметром струны  $d \ll L$ , относительным модулем упругости материала  $E$  и его натяжением  $T$ . В данной работе измерениями параметров колебания выявлена неточность аппроксимации (5).

В [4] приведены результаты экспериментального исследования собственных частот в распределённой системе в виде многочастотного тонкоплёночного пьезоэлектрического СВЧ-резонатора на синтетическом алмазе с объёмными акустическими волнами. Там установлено, что частотные промежутки между соседними обертонами в рассмотренной системе демонстрируют немонотонные ангармонические изменения с локальными максимумами и минимумами.

Физическим объяснением появления ангармонизма обертонов можно считать наложение (суперпозицию) волн, распространяющихся вдоль распределённой дисперсионной колебательной системы, которые отражаются на её концах в соответствии с граничными условиями. В результате этого форма суммарного колебания несинусоидальной формы  $y(t, x)$  зависит от расположения точек возбуждения  $x_0$  и наблюдения колебаний  $x \in (0, L)$ , причём огибающая колебательного процесса  $y(t, x)$  несимметрично изменяется во времени и в пространстве из-

за изменения соотношения между амплитудами обертонов и асинхронной вариации формы суммарного квазипериодического несущего колебания. Этот факт используется при извлечении звуков в электрогитаре [4].

### Измерение параметра ангармонизма в колебаниях струны

Изменения частотного интервала  $\Delta_n$  между соседними обертонами можно трактовать как вариацию текущей фазы квазипериодического колебания. Вызванная ими девиация частоты в спектральном представлении проявляется в уширении амплитудного спектра колебания (3) и в пульсациях его огибающей. Кепстр  $C(q)$ , основанный [11] на преобразовании Фурье от логарифма амплитудного спектра Фурье исходного колебания, в случае сигнала несинусоидальной формы без ангармонизма показывает сосредоточенные пики на гармониках частоты пульсаций спектра, показанные на рис. 2 жирными линиями. Для сигнала с ангармонизмом обертонов оно выявляет уширение, создавая в области репидов  $r$ -зону, показанную на рис. 2 тонкой линией.

Модификация [7] кепстрального метода состоит в нахождении такого значения коэффициента предискажения частотного масштаба спектра после первого преобразования Фурье, при котором ангармонизм компенсируется, а зона уширения преобразуется в сосредоточенный пик увеличенного уровня. Такая методика



Рис. 2 – Пример инвертированного в область репидов  $r = 1/q$  кепстра колебания без ангармонизма (жирная линия) и кепстра того же сигнала с параметром ангармонизма  $B = 0,05\%$  (тонкая линия)

позволяет существенно повысить точность измерений.

Результаты измерения значений параметра ангармонизма  $B$  модифицированным кепстральным методом для металлических струн электрогитары представлены на рис.3. По горизонтальной оси на этом рисунке отложены нормированные значения натяжения струны  $T = 4\rho L^2 f_1^2$ , функционально связанные с удобным для измерения значением частоты основного тона  $f_1$ .

Показанная пунктирными прямыми линиями на рис. 3 аппроксимация результатов измерений подтверждает, что приведённые выше идеализированные соотношения достоверно описывают явления ангармонизма в рассмотренной колебательной системе.

На рис. 4 показаны для гитарной струны результаты измерения зависимости значений частоты гармоник, отнесённых к целому кратному частоте основного тона  $f_n/nf_1$ , от номера  $n$ . Аналогичный вид имеют графики таких измерений для струн фортепиано с разными значениями частоты основного тона  $f_1$ .

Экспериментальные значения отклонений частоты обертона от прямой пропорциональ-

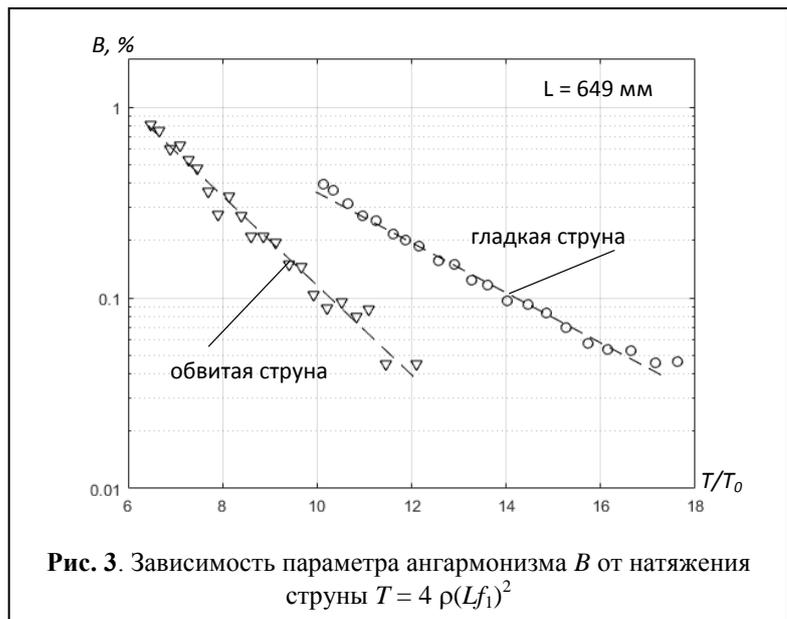


Рис. 3. Зависимость параметра ангармонизма  $B$  от натяжения струны  $T = 4\rho(Lf_1)^2$

ности номеру  $n$  (знаки  $^\circ$ ) показывают немонотонность её изменения в области малых значений номера обертона  $n$ , которая противоречит зависимости по (5) из [6, 10], показанной на рис. 4 тонкой сплошной линией. На этом рисунке пунктиром представлена уточнённая аппроксимация по (4). Анализ данных на рис. 4 показывает, что именно условия (2) упругого закрепления концов струны подтверждаются измерениями.

### Заключение

Таким образом, ангармонизм колебаний несинусоидальной формы появляется в рас-

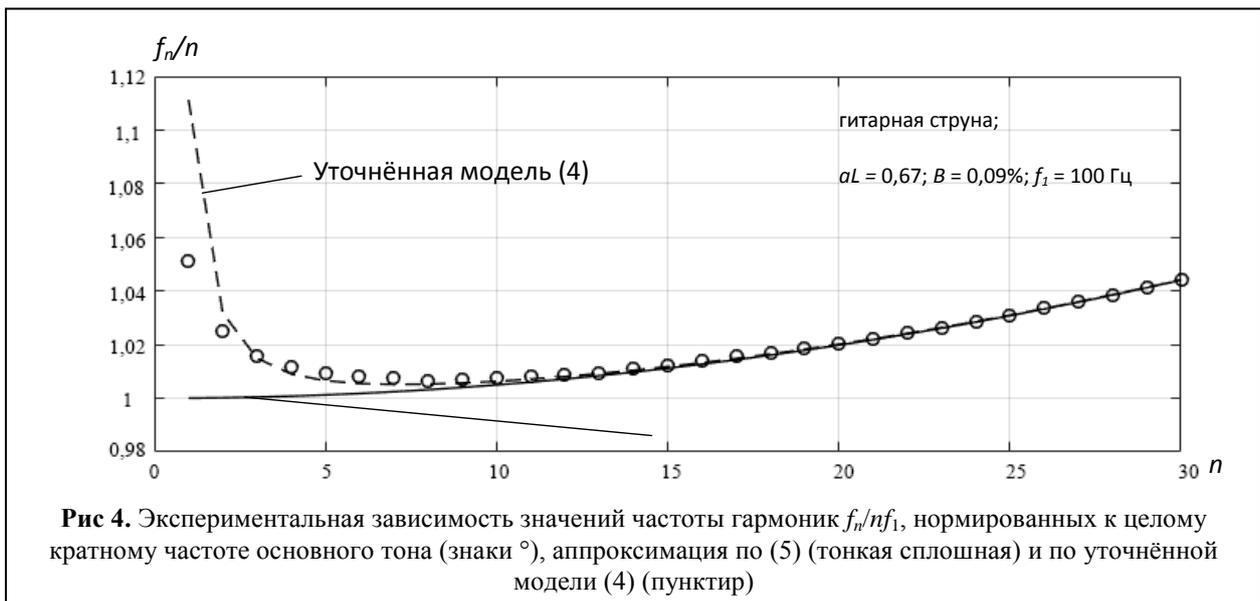


Рис 4. Экспериментальная зависимость значений частоты гармоник  $f_n/nf_1$ , нормированных к целому кратному частоте основного тона (знаки  $^\circ$ ), аппроксимация по (5) (тонкая сплошная) и по уточнённой модели (4) (пунктир)

пределённых механических и электромагнитных колебательных системах с малыми потерями и различной средой распространения волн из-за дисперсии фазовой скорости волн высших обертонов, распространяющихся вдоль пространственной координаты. В результате этого огибающая свободных колебаний оказывается несимметричной по отношению к состоянию покоя, а форма квазипериодического несущего колебания зависит от времени и от пространственной координаты. Использование кепстрального преобразования позволило измерить значения параметра анггармонизма и уточнить её функциональную зависимость от номера обертона. Анализ измеренных зависимостей значений частоты обертонов от их номера показал необходимость учёта условий упругости распределённой колебательной системы на её краях.

#### Литература

1. Алексеев С. Г., Гуляев Ю. В. и др. Некоторые тенденции развития акустоэлектроники СВЧ // Успехи физических наук. 2005. Т. 175. Вып. 8. – С. 895–900.
2. Ланда П.С. Автоколебания в распределённых системах. М.: ЛИБРОКОМ, 2015. – 320 с.
3. Двошерстов М.Ю., и др. Численный и экспериментальный анализ параметров акустоэлек-

тронного тонкоплёночного СВЧ-резонатора // Акустический журнал. 2013. Т. 59. № 5. – С. 569–577.

4. Сорокин Б.П., и др. Исследования много-частотных СВЧ акустических резонаторов на основе слоистой пьезоэлектрической структуры // Акустический журнал. 2015. Т. 61. № 4. С. 464–476; № 6. – С. 705–717.
5. Бахматов К.Б., Белов Л.А. Анализ сигнала струны с электромагнитным звукоснимателем // Вестник МЭИ. 1996. № 2. – С. 9–13.
6. Аскенфелд А., Галембо А. Исследование спектральной негармоничности музыкального звука с помощью алгоритмов экстракции высоты // Акустический журнал, 2000. Т. 46. Вып. 2. – С. 157–169.
7. Белов Л.А., Семёнов Н.С. Анггармонизм обертонов в сверхширокополосных квазипериодических сигналах // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2016. № 4 (24). – С. 26 – 33.
8. Ревина С.В., и др. Уравнения математической физики. Задачи и решения. Ростов н/Д: Южный Федеральный Ун-т, 2008. – 169 с.
9. Chen C.-Y., Bhat R. V. Effect of Boundary Condition on String Inharmonicity // Canadiens Acoustics. 2007. Vol. 35. No 3. P. 172–173.
10. Fletcher N. H., Rossing T. D. The Physics of Musical Instruments. 2nd ed. New York, Springer Science, 1998. – 756 p.
11. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. Изд. 3-е / пер. с англ. М., Техносфера, 2012. – 1048 с.

Поступила 15 мая 2017 г.

English

#### The oscillation anharmonicity in distributed systems

**Nikolay Sergeevich Semenov** – Post-graduate Student Federal State-funded Budgetary Educational Institution of Higher Education National Research University "Moscow Power Engineering Institute" (MPEI).

*E-mail:* semenov\_nick@mail.ru.

**Leonid Alekseevich Belov** – Candidate of Technical Sciences, Professor, Federal State-funded Budgetary Educational Institution of Higher Education National Research University "Moscow Power Engineering Institute" (MPEI).

*E-mail:* belovla@gmail.com.

*Address:* 111250, Russia, Moscow, Krasnokazarmennaya street, house 14.

**Abstract:** The variation in time parameters and processes spectral content occurring in electrical and mechanical oscillatory systems with low attenuation and distributed parameters are matched. The wave equation in partial derivatives was made through the example of oscillations free attenuation of a thin homogeneous elastic string, and the natural frequency values with a few options of fixing the string ends of and also the oscillatory process form is presented with consideration for attenuation, boundary conditions and any number of higher harmonics. It is indicated that the output signal in such systems has non-sinusoidal quasi-periodic form with a large number of higher harmonics (overtones) of the basic frequency of the comparable level. The dispersion

arises in the system if to consider the elastic fastening of the string ends, that is there arises the dependence of the phase velocity of higher harmonics waves along the space coordinate on their frequency, which results in the overtones anharmonicity – the difference between the natural frequency values from the values that are multiples of the principle tone frequency. It is demonstrated through comparison of the published data on the study of electromagnetic oscillations in piezoelectric radio-frequency resonators with distributed parameters that the phenomena of anharmonicity are of such nature there. The experimental measurement results of the overtones frequency in a broad values range of the overtone number and the bass frequency are given. The cepstral transform of the time initial functions was used to estimate anharmonicity parameter values. In such a case the frequency axis calibrated pre-emphasis, which compensates the inherent anharmonicity, was applied to increase the measurement accuracy.

*Keywords:* quasi-periodic signals; overtones anharmonicity; velocity dispersion of wave propagation; cepstrum; boundary conditions; distributed oscillatory system; string.

### References

1. Alexeev S. G., Gulyaev Yu. V., and other colleagues. Some development trends of microwave acoustic electronics // *Uspekhi fizicheskikh nauk*. 2005. Iss. V. 175. 8. Pp. 895-900.
2. P. S. Landa, *Self-Oscillations in distributed systems*. M.: LIBROKOM, 2015. 320 p.
3. Dvoyesherstov M. Y. and other colleagues. The parameters numerical and experimental analysis of acoustic electronic thin-film microwave resonators // *Akustichesky zhurnal*. 2013.T. 59. No. 5. Pp. 569 – 577.
4. Sorokin B. P., and other colleagues. Research of multi-frequency microwave acoustic resonators based on layered piezoelectric structure // *Akustichesky zhurnal*, 2015.T. 61. No. 4. P. 464 – 476; No. 6. Pp. 705 – 717.
5. Bakhmatov K. B., Belov L. A. Signal analysis of string with electromagnetic pickup // *MPEI Vestnik*. 1996. No. 2. Pp. 9 – 13.
6. Askenfeld A., Galembo A. Musical sound spectral anharmonicity research through pitch extraction algorithms // *Akustichesky zhurnal*. 2000. V. 46. V. 2. Pp. 157 – 169.
7. Belov L. A., Semenov N. S. The overtones anharmonicity in the ultrabroadband quasi-periodic signals // *Radiotekhnicheskije i telekommunikatsionnye sistemy*. 2016. No. 4 (24). Pp. 26 – 33.
8. Revina S. V. and other colleagues. *The mathematical physics equations. Problems and solutions*. Rostov on Don: Southern Federal University. 2008. 169 p.
9. Chen C.-Y., Bhat R. B. Effect of Boundary Condition on String Inharmonicity // *Canadiens Acoustics*. 2007. Vol. 35. No 3. Pp. 172 – 173.
10. Fletcher N. H., Rossing T. D. *The Physics of Musical Instruments*. 2nd ed.-New York, Springer Science, 1998. 756 p.
11. Oppenheim A., Schaffer R. *Digital Signal Processing*. 3<sup>rd</sup> Ed. / Transl. from Engl. M. Tekhnosfera, 2012. 1048 p.