

АНАЛИЗ ПОДХОДОВ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ВОЗДУШНЫХ ОБЪЕКТОВ**Романов Дмитрий Николаевич**

кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры радиотехники Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

Адрес: 602264, Российская Федерация, Владимирская обл., г. Муром, ул. Орловская, д. 23.

E-mail для связи: radon81@mail.ru

Аннотация: Методы математического моделирования систем находят применения в различных областях человеческой деятельности, в том числе и в системах управления воздушным движением. Применение методов моделирования позволяет существенно сократить временные и ресурсные затраты при разработке подобных систем, проводить обучение и повышать квалификацию обслуживающего персонала, модернизировать системы на этапе их эксплуатации. Представленная работа посвящена сравнению трёх методов построения траектории движения воздушного объекта по заданным оператором опорным точкам: метода на основе кривых Безье, метода аппроксимации Чайкина и метода сплайнов. Эффективность методов рассмотрена на примере построения траектории, на участке манёвра воздушного судна, ограниченного максимальным значением скорости в 800–1000 км/ч и величиной перегрузки не более 5g. Проведено подробное сравнение используемых методов по величине минимального радиуса разворота, сделаны подробные выводы о достоинствах и недостатках анализируемых методов.

Ключевые слова: траектория движения, кривые Безье, кубический сплайн, кривые Чайкина, воздушный объект.

Введение

При разработке и эксплуатации систем различного назначения активно используют методы математического моделирования, которые позволяют существенно сократить время разработки, повысить качество анализа проектируемой системы, выявить и исправить возможные недостатки. На этапе эксплуатации систем моделирование систем позволяет обучать обслуживающий персонал без использования существующей системы, исследовать новые условия эксплуатации и режимы работы, предложить возможные пути модернизации. В связи с этим моделирование активно используется практически во всех областях человеческой деятельности и с каждым годом области применения методов моделирования все больше расширяется, этому также способствует всевозрастающая мощь и доступность современных вычислительных средств, и развитие специализированного программного обеспечения, а также углубление теории моделирования и, как следствие, наличие большого объёма литературы по этой тематике (см, например, [1,2]).

При построении математической модели системы требуется выдержать баланс между точностью представления функционирования реального объекта и её сложностью, и для этого разрабатываются, и используются различные подходы к построению моделей.

Методы математического моделирования весьма разнообразны и имеют свою специфику в тех или иных областях применения. В системах управления воздушным движением для создания тренажёрных средств или отработки алгоритмов обработки траекторной информации требуется создать модель движения воздушных объектов (ВО) различных типов. Необходимо формировать координаты местоположения определённого ВО в дискретные моменты времени с учётом динамики его движения, при этом необходимо учитывать некоторые ограничения: скорость

движения ВО и его перегрузка не должны превышать заданных значений.

В настоящее время формировать траекторию движения ВО можно несколькими способами. Во-первых, запоминать результаты сопровождения радиолокационными станциями реальных ВО и затем их использовать для построения траекторий движения. Метод позволяет получить реальные траектории движения, в отличие от всех других методов, но реализация этого подхода требует больших финансовых и временных затрат. Вторым направлением является задание кинематических уравнений движения ВО в пространстве его перемещения в виде системы дифференциальных уравнений и в дальнейшем результат решения этих уравнений для заданных начальных условий будет формировать траекторию движения. При этом в зависимости от выполняемой ВО фигуры пилотажа набор уравнений, описывающий траекторию движения будет свой [3]. При помощи такого подхода описываются достаточно простые траектории движения объектов, усложнение траектории (как, например, в [4]) приводит к увеличению системы уравнений, к сложностям в её составлении и решения, особенно в случае, если уравнения являются нелинейными. При построении общей модели траектории движения ВО её компонуют из участков с различными законами движения, полученными либо экспериментально, либо с помощью дифференциальных уравнений.

Ещё один подход основан на том, что формируют траекторию движения в виде случайного процесса с участками маневрирования [5]. Такая траектория позволяет учесть общую динамику движения ВО, но, как правило, отличается от реальных траекторий. Такая модель полезна при анализе и синтезе алгоритмов вторичной обработки РЛС [5,6]. В ситуациях, когда не требуется в модели учитывать тонкую динамику движения объекта можно использовать следующий под-

ход: оператор задаёт на карте области движения объекта примерные точки траектории, а модель формирует траекторию движения наиболее близкую к этим точкам с учётом необходимых ограничений, например, скорости движения ВО, максимальных перегрузок, высоты полёта и т.п. Очевидно, что в этом случае сформировать результирующую траекторию можно разными методами.

Целью работы является сравнительный анализ методов построения траектории движения ВО на основе кривых Безье, алгоритма Чайкина и сплайн интерполяции.

Постановка задачи

Предварительно оператор формирует набор опорных точек с двумя координатами на плоскости. В этой работе считаем, что высота ВО постоянная. При анализе работоспособности исследуемых методов получения траектории координаты опорных точек приведены в таблице 1.

Таблица 1

X, км	-5	0	4	4	4	0	5
Y, км	-4	-4	-3	0	3	4	4

Оператор выделяет из заданных опорных точек участки прямолинейного движения ВО и участки маневрирования, на которых должна формироваться траектория движения, состоящая из отдельных кусочно-заданных дуг и прямых.

Движение ВО ограничено максимальным значением его скорости и максимальным значением перегрузки на участках маневрирования. При исследовании алгоритмов рассматривался участок манёвра ВО с ограничением скорости 800–1000 км/ч и перегрузкой не более 5g.

Метод построения траектории движения ВО на основе кривых Безье

Применение этого метода для моделирования траекторий движения ВО описано в работе [7], в том числе работе автора [8], поэтому здесь остановимся на результатах построения кривых Безье для моделирования манёвра ВО с заданными ограничениями. Траектория движения ВО состоит из набора прямых и дуг на участках манёвров, поэтому для их описания используются кривые Безье первого, второго и третьего порядка. Основой для кусочно-заданной траектории являются кривые Безье

$$B(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t),$$

где n — порядок кривой; P_i — вектор координат i -й опорной точки;

$$B_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-1}$$

— полином Бернштейна степени n ; t — безразмерный параметр, принадлежащий интервалу $t \in [0; 1]$.

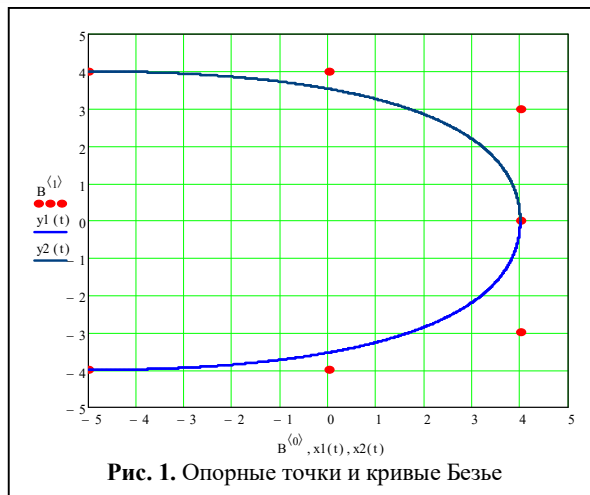


Рис. 1. Опорные точки и кривые Безье

Траектория движения ВО строится на основе заданных n -точек при помощи кривой Безье $(n-1)$ -го порядка. При этом упрощается согласование кинематических параметров воздушного объекта на различных участках траектории, так как производная сохраняет свою непрерывность в точках перегиба полученной трассы. Для координат опорных точек траектории, приведённых в таблице 1, можно обойтись двумя кривыми, описываемыми параметрическими выражениями. Первая кривая задаётся парой уравнений:

$$x_1(t) = 21t^3 - 39t^2 + 27t - 5, \quad (1)$$

$$y_1(t) = 7t^3 - 6t^2 + 3t - 4, \quad (2)$$

а вторая описывается выражениями:

$$x_2(t) = 24t^2 - 21t^3 - 12t + 4, \quad (3)$$

$$y_2(t) = 7t^3 - 15t^2 + 12t. \quad (4)$$

Результирующая траектория движения ВО, построенная по этим уравнениям, и опорные точки представлены на рис. 1. Из рис. 1 видно, что получившаяся траектория движения ВО проходит через начальную, среднюю и конечную опорные точки.

Проведём расчёт перегрузки при движении самолёта по заданной траектории. Перегрузка определяется, как центростремительное ускорение при движении с заданной скоростью по дуге кривой. Для определения перегрузки необходимо найти минимальный радиус кривизны, который даст представление о максимальном значении перегрузки. Для траектории, заданной с помощью параметрических кривых, радиус кривизны определяется по формуле [7]:

$$R(t) = \frac{\left[(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}, \quad (5)$$

При минимальном значении радиуса будет достигаться максимальное значение перегрузки. Для траектории, представленной на рис. 1 и описанной выражениями (1), (2) выражение (5) примет вид:

$$R(t) = \frac{\left[(63t^2 - 72t + 27)^2 + (21t^2 - 12t + 3)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left[(63t^2 - 72t + 27)(42t - 12) - (21t^2 - 12t + 3)(126t - 78) \right]}. \quad (6)$$

Так как расположение опорных точек симметрично вдоль вертикальной оси, то второй участок траектории, описанный кривыми (3) и (4), имеет такую же

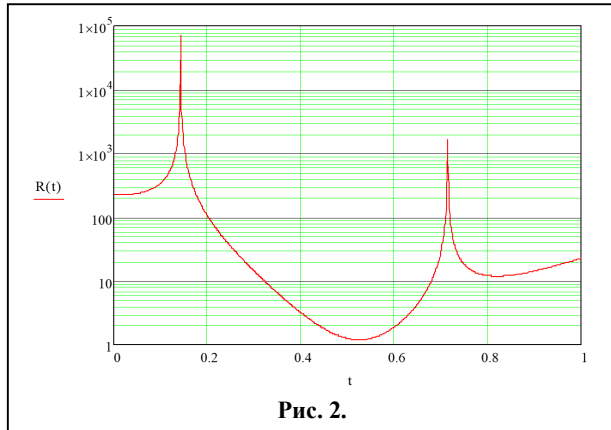


Рис. 2.

форму, как и первый, но зеркально отображённый относительно горизонтальной оси. Из этого следует, что радиус кривизны второго участка меняется также как и у первого.

Для траектории, представленной на рис. 1, зависимость радиуса кривизны от безразмерного параметра t , описана выражением (6) и представлена на рис. 2.

Значение перегрузки определяется, как величина центростремительного ускорения:

$$a = \frac{V^2}{R},$$

где a — центростремительное ускорение (перегрузка); R — минимальный радиус кривизны; V — скорость движения ВО.

Минимальное значение радиуса кривизны, исходя из выражения (6) и рис. 2, получается равным 1,182 км. При таком значении радиуса кривизны и скорости движения ВО 800 км/ч, значение перегрузки будет составлять 41,8 м/с² или 4,3g.

Метод построения траектории движения ВО на основе подхода Чайкина

Второй подход, который может быть использован в этом случае, основан на построении кривых Чайкина. Это метод «вырезания углов» траектории, которые получаются при соединении опорных точек отрезками прямых. Метод состоит в следующем [9]: опорные точки соединяются отрезками прямых, на каждом отрезке отмечаются две новые точки на расстоянии 0,25 и 0,75 от начала отрезка, при этом исходные точки отбрасываются, кроме начальной и конечной. Затем этот процесс повторяется необходимое число раз.

Результат первой итерации алгоритма Чайкина над координатами опорных точек изображены на рис. 3, на котором показаны опорные (большого размера) и результирующие точки. Необходимо отметить, что

вблизи начальной и конечной точки траектории движения алгоритм Чайкина не применяется, так как это никак не влияет на сглаживание. Результаты второй итерации алгоритма показаны на рис. 4, третьей итерации — на рис. 5.

Полученные результаты показывают, что использование алгоритма Чайкина для сглаживания в существенной степени сохраняет характер исходной аппроксимации отрезками прямых, делая более гладкой непосредственно саму область сопряжения двух отрезков.

Также необходимо отметить, что каждая последующая итерация алгоритма Чайкина последовательно приводит к уменьшению минимального радиуса кривизны траектории, и, как следствие, к увеличению перегрузки при заданной скорости манёвра.

Точки, полученные при использовании алгоритма Чайкина, могут служить основой для сглаживания на основе сплайнов или полиномов Бернштейна второй и третьей степеней. В случае использования полиномов Бернштейна упрощается привязка траектории к дискретному времени в РЛС, так как эти полиномы содержат безразмерный параметр t , который может выступать в роли нормированного времени.

В случае использования полиномов Бернштейна для дополнительного сглаживания при использовании

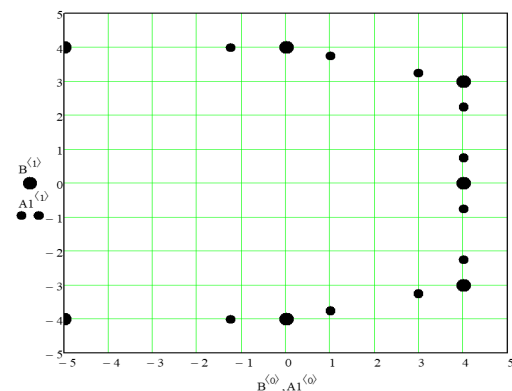


Рис. 3. Дополнительные и исходные точки после первой итерации алгоритма Чайкина

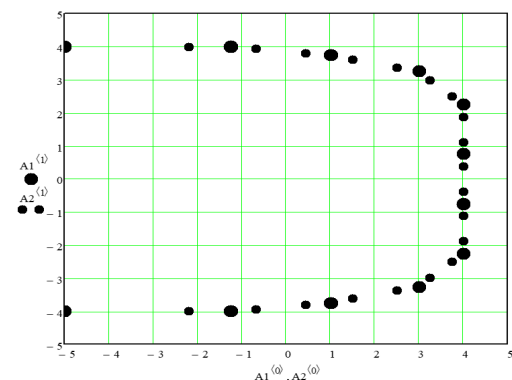


Рис. 4. Результаты работы алгоритма Чайкина после второй итерации (более крупным обозначены точки, полученные на первой итерации)

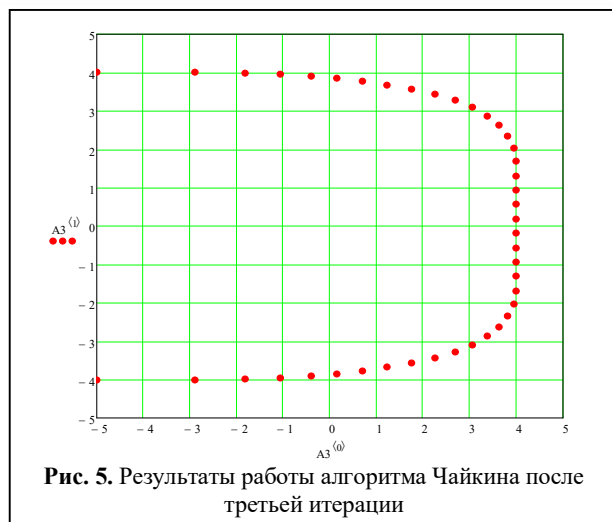


Рис. 5. Результаты работы алгоритма Чайкина после третьей итерации

Таблица 2

Номер итерации	1	2	3
Минимальный радиус кривизны, км	0,936	0,655	0,610
Перегрузка при скорости 800 км/ч, g	5,38	7,69	8,26

алгоритма Чайкина, минимальный радиус кривизны траектории может быть рассчитан по выражению (5).

Рассчитанная минимальная кривизна траектории для этого случая приведена в таблице 2.

Из таблицы следует, что последовательное увеличение количества итераций алгоритма Чайкина хотя и приводит к сглаживанию переходов между отрезками, но вместе с тем уменьшает минимальный радиус кривизны траектории.

Метод сплайнов при построении траектории движения ВО

Одним из широко применяемых методов аппроксимации кривых является метод, основанный на применении сплайнов. При этом аппроксимация может осуществляться с помощью степенных полиномов первого, второго и третьего порядка. Особенностью сплайнов является то, что они обеспечивают гладкое сопряжение в узлах аппроксимации, так как производная не претерпевает в них разрыва [10].

На каждом отрезке кубический сплайн представляет собой полином третьей степени:

$$s_n = a_n + b_n(x - x_n) + \frac{c_n}{2}(x - x_n)^2 + \frac{d_n}{6}(x - x_n)^3,$$

где a_n , b_n , c_n , d_n — неизвестные коэффициенты аппроксимации, подлежащие определению. При этом:

$$a_n = s_n(x_n); b_n = s'_n(x_n); c_n = s''_n(x_n); d_n = s'''_n(x_n).$$

Однако аппроксимация сплайнами может давать неприемлемый результат при неравномерном расположении узлов аппроксимации, из-за чего приходится менять количество или расположение узлов. При аппроксимации сплайнами по точкам, приведённым в таблице 1, траектория движения воздушного судна имеет существенные выбросы. Поэтому при аппрок-

симации сплайнами использованы точки, приведённые в таблице 3.

При использовании сплайнов траектория манёвра принимает вид, представленный на рис. 6.

Так как полученный сплайн задан в виде графика, то для определения радиуса кривизны используется выражение [7]:

$$R(x) = \frac{(1 + (f')^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''|}.$$

Для траектории, представленной на рис. 6, значение минимально радиуса кривизны составляет 1,032 км. Для такого радиуса кривизны значение скорости при перегрузке 5g составит 818 км/ч.

При использовании сплайнов для формирования траектории получаем непрерывную функцию, зависящую от времени, как и в случае применения кривых Безье.

Заключение

Таким образом, лучшие параметры при моделировании получены при использовании кривых Безье, но это требует соблюдения определенных правил при размещении точек, по которым формируется траектория. Для обеспечения непрерывности производных не менее трёх точек должны лежать на одной прямой.

Использование кривых Чайкина сохраняет характер, свойственный прямым линиям между узлами аппроксимации, что будет приводить либо к увеличению перегрузки, либо к уменьшению скорости манёвра при моделировании. Следовательно, использование кривых Чайкина при моделировании манёвра «боевой разворот» нецелесообразно.

Моделирование траекторий с помощью сплайнов, может дать непредсказуемый результат при определенном расположении узлов аппроксимации, что не позволяет применять этот метод для широкого круга задач по представлению траекторий ВО.

Таблица 3

X, км	-5	0	4	0	5
Y, км	-4	-4	0	4	4

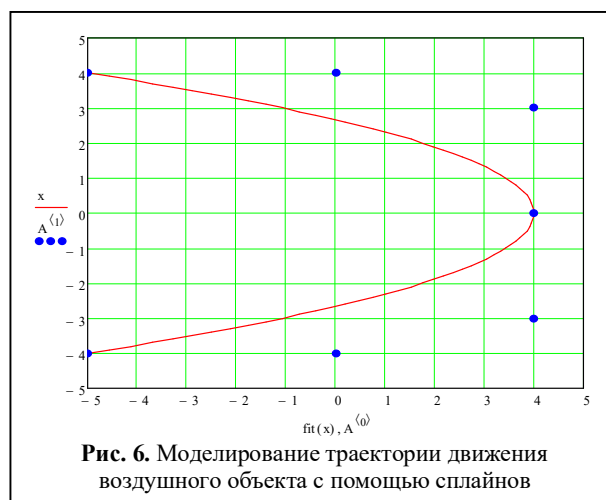


Рис. 6. Моделирование траектории движения воздушного объекта с помощью сплайнов

Литература

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
2. Введение в математическое моделирование: Учебное пособие. Под ред. П.В. Трусова. М.: Логос, 2005. 440 с.
3. Богословский С.В., Дорофеев А.Д. Динамика полета летательных аппаратов: Учеб. пособие. СПбГУАП. СПб., 2002. 64 с.
4. Канащенко А.И., Корчагин В.М., Меркулов В.И., Самарин О.Ф. Сверхманевренность и бортовые радиолокационные системы // Радиотехника, 2002. С. 43–50.
5. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем: Учебное пособие для вузов. М.: Радио и связь, 1991. 608 с.
6. Фарина А., Студер Ф. Цифровая обработка радиолокационной информации. Сопровождение целей: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1993. 320 с.
7. Zhiganov S.N., Zhiganova E.A., Mikheev K.V. Development of the Method for Constructing Trajectories of Air Objects // 2018 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon). 3-4 Oct. 2018. Pp. 1–4.
8. Mikheev K.V., Romanov D.N., Smirnov M.S. Automatic System for Modeling of Forming, Receiving and Processing Radar Signals // 2018 14th International Scientific-Technical Conference APEIE. Pp. 421–425.
9. Романов Д.Н., Михеев К.В., Пальманов В.А. Разработка информационно-измерительной системы, формирующей траектории движения воздушных объектов // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2018. №3. С. 26–32.
10. Chaikin G.M. An algorithm for high speed curve generation // Comp. Graph. and Im. Proc. 1974. Vol. 3(4). Pp. 346–349.
11. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.

Поступила 15 января 2026 г.

English

ANALYSIS OF APPROACHES TO MODELING TRAJECTORIES OF AERIAL OBJECTS

Dmitry Nikolaevich Romanov — PhD in Engineering, Associate Professor, Department of Radio Engineering, Murom Institute (branch) of the “Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs”.

Address: 602264, Russian Federation, Vladimir region, Murom, Orlovskaya str., 23.

E-mail: radon81@mail.ru

Abstract: Methods of mathematical modeling of systems find applications in various areas of human activity, including air traffic control systems. The use of modeling methods can significantly reduce time and resource costs in the development of such systems, provide training and professional development for personnel, and enable system upgrades during the operational phase. This paper focuses on comparing three methods for constructing the trajectory of an aerial object based on reference points specified by the operator: the Bézier curve method, the Chaikin curve approximation method, and the spline method. The effectiveness of these methods is examined through the construction of a trajectory during an aircraft maneuver segment, constrained by a maximum speed of 800–1000 km/h and a load factor not exceeding 5g. A detailed comparison of the methods is conducted with respect to the minimum turning radius, and comprehensive conclusions are drawn regarding the advantages and disadvantages of the analyzed methods.

Keywords: trajectory, Bézier curves, cubic spline, Chaikin curves, aerial object.

References

1. Samarskii A.A., Mikhailov A.P. Mathematical modelling: Ideas. Methods. Examples. 2nd ed., revised. Moscow: Fizmatlit, 2001. 320 p.
2. Trusov P.V. (Ed.). Introduction to Mathematical Modelling: Textbook. Moscow: Logos, 2005. 440 p.
3. Bogoslovskii S.V., Dorofeev A.D. Flight dynamic of aircraft: Textbook. SPbSUAI. Saint Petersburg, 2002. 64 p.
4. Kanashchenkov A.I., Korchagin V.M., Merkulov V.I., Samarin O.F. Super-maneuvrability and on-board radar systems. Radiotekhnika, 2002. Pp. 43–50.
5. Tikhonov V.I., Kharisov V.N. Statistical Analysis and Synthesis of Radio Engineering Devices and Systems: A Textbook for Universities. Moscow: Radio i Svyaz', 1991. 608 p.
6. Farina A., Studer F. Digital Processing of Radar Information. Target Tracking. Translated from English. Moscow: Radio i Svyaz', 1993. 320 p.
7. Zhiganov S.N., Zhiganova E.A., Mikheev K.V. Development of the Method for Constructing Trajectories of Air Objects. 2018 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon). 3-4 Oct. 2018. Pp. 1–4.
8. Mikheev K.V., Romanov D.N., Smirnov M.S. Automatic System for Modeling of Forming, Receiving and Processing Radar Signals. 2018 14th International Scientific-Technical Conference APEIE. Pp. 421–425.
9. Romanov D.N., Mikheev K.V., Palmanov V.A. Development of an Information and Measurement System That Generates Trajectories of Air Objects. Radio Engineering and Telecommunication Systems. 2018. No. 3. Pp. 26–32.
10. Chaikin G.M. An algorithm for high speed curve generation. Comp. Graph. and Im. Proc. 1974. Vol. 3(4). Pp. 346–349.
11. Stechkin S.B., Subbotin Yu.N. Splines in Computational Mathematics. Moscow: Nauka, 1976.