

Системы, сети и устройства телекоммуникаций

DOI 10.66032/2221-2574-2026-1-3-15-22

УДК 621.391.15

МЕТОД КОНСТРУИРОВАНИЯ ПОЛЯРНЫХ КОДОВ ДЛЯ МОДУЛЯЦИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА
НА ОСНОВЕ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОЙ РАСЧЁТНОЙ ТОЧКИ

Бу Тхе Зуэт

аспирант, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет
телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича».

Глушанков Евгений Иванович

доктор технических наук, профессор, профессор кафедры радиотехники ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский
государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича».

Адрес: 193232, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, пр. Большевиков д. 22, к. 1.

E-mail для связи: vu.tz@sut.ru

Аннотация: В данной работе выполнено конструирование полярных кодов для систем с модуляциями высокого порядка на основе метода гауссовской аппроксимации (ГА), корректность работы которого критически зависит от выбора инициализирующего расчётного отношения сигнал/шум. Неточный выбор данного параметра существенно затрудняет минимизацию вероятности ошибки в канале с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ). Целью исследования является разработка методики определения оптимального значения данного параметра. Предложен метод, основанный на редукции реального канала к виртуальному каналу с двоичной фазовой манипуляцией и анализе зависимости между производной параметра Бхаттачарьи и надёжностью подканалов. Разработан алгоритм локализации зоны наиболее интенсивной поляризации. Имитационное моделирование в среде MATLAB подтвердило эффективность подхода. В результате определены конкретные интервалы оптимального проектирования для квадратурной и восьмеричной фазовой манипуляции, а также 16- и 64-позиционной квадратурной амплитудной модуляции, позволяющие минимизировать вероятность блочной ошибки за счёт смещения рабочей точки в область более высоких энергий.

Ключевые слова: полярные коды, гауссовская аппроксимация, параметр Бхаттачарьи, расчётное отношение сигнал/шум, MATLAB.

Введение

Полярные коды [1] — первый класс кодов, доказуемо достигающих пропускной способности двоичных симметричных каналов без памяти при низкой вычислительной сложности кодирования и декодирования [1, 2]. Их высокая эффективность подтверждена включением в стандарт 5G NR [3], что актуализирует задачу их интеграции с модуляциями высокого порядка.

Эффективность полярных кодов критически зависит от процедуры конструирования (отбора надёжных подканалов) [1]. Ввиду сложности получения аналитических выражений для параметра Бхаттачарьи в замкнутой форме [4], на практике применяются численные методы: моделирование Монте-Карло [1], эволюция плотности [5–7] или гауссовская аппроксимация [8, 9]. Основным недостатком данных методов является зависимость от мгновенного значения отношения сигнал/шум [10], приводящая к нестабильности структуры кода, которую зачастую пытаются компенсировать пороговыми стратегиями [11, 12].

Следовательно, точное определение точки проектирования является решающим условием построения оптимального кода, особенно для схем модуляции высокого порядка. В данной работе предлагается системный подход к определению этой точки на основе анализа производной параметра Бхаттачарьи. Предлагаемый метод позволяет локализовать оптимальную

рабочую область алгоритма конструирования, максимизируя помехоустойчивость системы.

Полярные коды

В общем случае полярные коды определяются как класс линейных блочных кодов с длиной кодового слова $N = 2^n$ и размером информационного блока K . Процесс кодирования для формирования кодового слова x_1^N из входной последовательности u_1^N описывается следующим линейным алгебраическим уравнением:

$$x_1^N = u_1^N G_N,$$

где: $u_1^N \in \{0,1\}^N$ — входной вектор, содержащий как информационные, так и замороженные биты; $x_1^N \in \{0,1\}^N$ — закодированное кодовое слово, которое будет передано; G_N — порождающая матрица размерности $N \times N$.

Входной вектор u_1^N не содержит исключительно информационную нагрузку, а разделяется на два подмножества в зависимости от надёжности синтезированных каналов:

- Информационное множество $\mathcal{A}$: Содержит K индексов каналов, обладающих наивысшей надёжностью. Элементы u_i , где $i \in \mathcal{A}$, переносят полезные биты данных.

• Замороженное множество $\mathcal{A}^c$: Содержит оставшиеся $N - K$ индексов, соответствующих каналам с низкой надёжностью. Элементам u_i , где $i \in \mathcal{A}^c$, присваиваются фиксированные значения (обычно 0), которые заранее известны как на передающей, так и на приёмной стороне.

По завершении процесса кодирования кодовое слово x_1^N поступает на модулятор для отображения в последовательность комплексных символов s . В данном исследовании рассматриваются схемы модуляции высокого порядка, где каждый символ переносит $m = \log_2 M$ кодированных бит. Сигнал передаётся по каналу с АБГШ, и на приёмной стороне принятый сигнал имеет вид $y = s + n$, где n — компонента комплексного гауссовского шума. Блок мягкой демодуляции вычисляет логарифмические отношения правдоподобия (ЛОП) для каждого бита, входящего в состав символа, на основе принятого сигнала y .

$$L(u) = \ln \left[\frac{P(y|x=0)}{P(y|x=1)} \right]. \quad (1)$$

Для реализации процесса декодирования применяется алгоритм последовательного исключения (от англ. Successive Cancellation – SC), предложенный в [1], в котором декодер проходит по дереву поляризации и оценивает биты $\hat{u}_k$ последовательно от $k = 1$ до $k = N$. На каждом этапе декодирования промежуточные значения ЛОП обновляются с помощью двух базовых функций, соответствующих двум ветвям ядра поляризации. Обозначим α_l и α_r как входные значения ЛОП с предыдущего уровня. Значение ЛОП для проверочного узла, соответствующего биту u_{2i-1} , вычисляется точно по формуле [12, 13]:

$$f(\alpha_l, \alpha_r) = 2 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(\frac{\alpha_l}{2} \right) \tanh \left(\frac{\alpha_r}{2} \right) \right).$$

После того, как бит u_{2i-1} оценён как $\hat{u}$, это значение используется для устранения влияния бита и обновления ЛОП для переменного узла u_{2i} по формуле:

$$g(\alpha_r, \alpha_l) = \begin{cases} \alpha_r + \alpha_l & \hat{u} = 0 \\ \alpha_r - \alpha_l & \hat{u} = 1 \end{cases}.$$

Хотя алгоритм SC обладает низкой сложностью, его критическим недостатком является явление распространения ошибок, при котором ошибочное решение на ранней стадии приводит к цепочке ошибок в последующих битах. Для устранения этого ограничения в исследовании используется алгоритм декодирования списком с последовательным исключением и поддержкой CRC (от англ. CRC-Aided Successive Cancellation List — CA-SCL) [14]. Вместо сохранения единственного пути, как в SC, алгоритм CA-SCL параллельно поддерживает список из L наиболее вероятных путей на каждом этапе принятия решения. По завершении процесса декодирования блок проверки CRC анализирует этот список для отсеивания оши-

бочных путей и выбора валидного кодового слова с наилучшей метрикой пути, что значительно улучшает характеристики системы.

Метод построения кода на основе гауссовской аппроксимации

Практическая реализация процедуры конструирования кода требует перехода от качественного описания поляризации к строгой количественной оценке надёжности каждого синтезированного канала. Фундаментальной задачей при проектировании полярных кодов является определение набора индексов каналов $\mathcal{A}$, обладающих наивысшей надёжностью, для присвоения им информационных битов. Для решения этой задачи в условиях канала АБГШ метод гауссовской аппроксимации, предложенный в [8, 9], представляет собой эффективный инструмент, позволяющий существенно снизить вычислительную сложность по сравнению с методом эволюции плотности.

Теоретическая база ГА основывается на статистическом допущении, согласно которому для сигналов с двоичной фазовой манипуляцией (от англ. Binary Phase Shift Keying — BPSK), передаваемых по каналу АБГШ, распределение вероятностей значений ЛОП во всех узлах дерева поляризации приближённо подчиняется закону распределения Гаусса $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. В частности, данное распределение удовлетворяет условию согласованной симметрии, при котором дисперсия всегда равна удвоенному значению математического ожидания [12]. Данное свойство позволяет полностью охарактеризовать надёжность канала посредством единственного параметра — математического ожидания ЛОП. Следовательно, процесс построения кода сводится к отслеживанию эволюции математического ожидания ЛОП на различных этапах поляризации. В соответствии с древовидной структурой кода, правило пересчёта математических ожиданий для верхней и нижней ветвей на каждом шаге рекурсии описывается следующей системой уравнений [8, 12]:

$$\begin{aligned} E[L_N^{(2i-1)}] &= \phi^{-1} \left(1 - \left(1 - \phi \left(E[L_{N/2}^{(i)}] \right) \right)^2 \right), \\ E[L_N^{(2i)}] &= 2 E[L_{N/2}^{(i)}], \end{aligned} \quad (2)$$

где $E[L_{N/2}^{(i)}]$ — входное значение с предыдущего этапа, а индексы $2i-1$ и $2i$ соответствуют результатам преобразования в верхней и нижней ветвях ядра поляризации соответственно.

В приведённых выше выражениях функция ϕ , описывающая нелинейную взаимосвязь между математическим ожиданием ЛОП и вероятностью ошибки, определяется интегралом [8, 15]:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \tanh\left(\frac{z}{2}\right) e^{-\frac{(z-t)^2}{4t}} du, & t > 0, \\ 1, & t = 0, \end{cases}$$

где $t = E[L]$ — математическое ожидание ЛОП (входной параметр, характеризующий уровень надёжно-

сти); z — переменная интегрирования, соответствующая значениям ЛОП.

Однако прямое вычисление интеграла $\phi(t)$ и обратной функции $\phi^{-1}(t)$ сопряжено с высокой вычислительной сложностью. Поэтому в данной работе для практической реализации алгоритма применяется точная аналитическая аппроксимация $\phi(t)$, предложенная в [8]:

$$\phi(t) = \begin{cases} \exp(-0.4527t^{0.86} + 0.0218), & 0 < t \leq 10, \\ \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left(-\frac{t}{4}\right) \left(1 - \frac{10}{7t}\right), & t > 10, \end{cases} \quad (3)$$

При масштабировании на системы с использованием модуляции высокого порядка, такие, как М-ичная квадратурная амплитудная модуляция (М-QAM) или М-ичная фазовая манипуляция (М-PSK), распределение первичных ЛОП фактически представляет собой многомодальную гауссовскую смесь, обусловленную различиями в евклидовых расстояниях внутри сигнального созвездия. С целью верификации обоснованности допущения ГА и определения эффективной области его применения, был проведён статистический анализ реального распределения ЛОП в расчётной точке $E_s / N_0 = 6$ дБ. Результаты моделирования для схем модуляции BPSK, QPSK (от русск. Квадратурная фазовая манипуляция), 8-PSK, 16-QAM и 64-QAM наглядно представлены на рис. 1.

Для группы фазовой модуляции низкого порядка, включающей BPSK и QPSK (рис. 1 а, б), гистограмма значений ЛОП, полученная в результате моделирования, практически идеально совпадает с теоретической кривой плотности вероятности Гаусса. В случае QPSK это соответствие обусловлено его ортогональной природой: сигнал QPSK может быть декомпозирован на два независимых потока BPSK в синфазной и квадратурной ветвях. Следовательно, распределение ЛОП для QPSK сохраняет свойство одномодальности Гаусса и удовлетворяет условию согласованной симметрии ($\sigma^2 = 2\mu$), что позволяет напрямую применять оригинальные формулы обновления ГА.

Напротив, характер статистического распределения претерпевает качественные изменения при переходе к схемам модуляции высокого порядка. Как видно на рис. 1, в-ж, для случаев 8-PSK, 16-QAM и 64-QAM, распределение ЛОП больше не подчиняется стандартной колоколообразной форме, а демонстрирует ярко выраженные мультимодальные свойства. Это статистическое отклонение приводит к тому, что прямое применение традиционных формул ГА даёт неточную оценку ранжирования каналов. Для устранения этой проблемы и обеспечения возможности повторного использования вычислительно эффективного алгоритма ГА для модуляции высокого порядка, в исследовании предлагается метод эквивалентной гауссовской аппроксимации. Вместо попытки точного моделирования сложного смешанного распределения 8-PSK или М-QAM, данный метод выполняет приведение реального канала передачи к

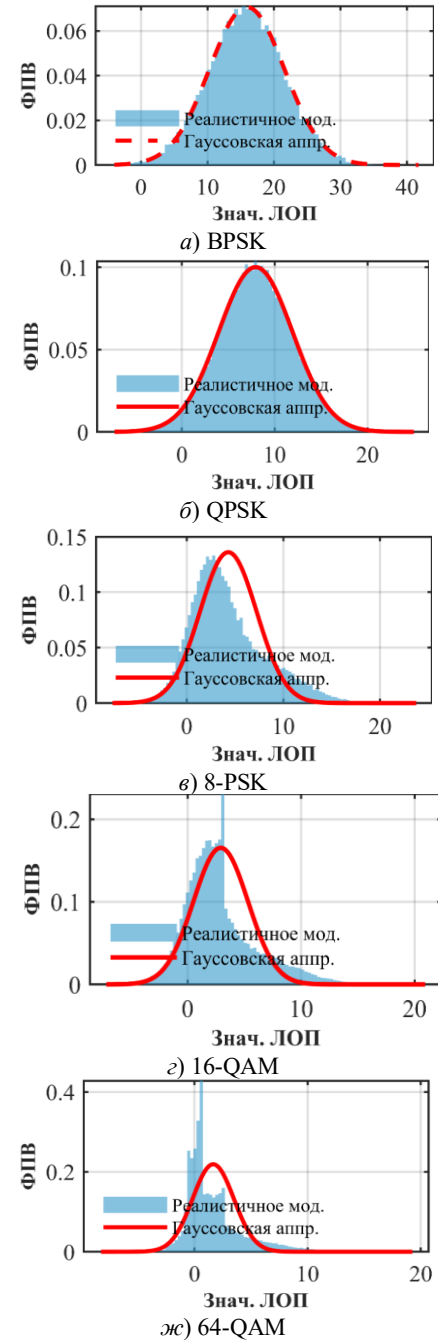


Рис. 1. Статистический анализ распределения ЛОП для различных схем модуляции в канале АБГШ

виртуальному эквивалентному каналу BPSK. Основываясь на допущении, что средняя надёжность канала может быть представлена математическим ожиданием величины ЛОП, эмпирическое среднее значение вычисляется на основе данных моделирования следующим образом:

$$E[L_{эфф}] = \frac{1}{N_{\text{блт}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{блт}}} |L_{\text{сим}}^{(k)}|,$$

где $N_{\text{блт}}$ — общее количество выборок ЛОП, полученных в ходе моделирования методом Монте-Карло; $L_{\text{сим}}^{(k)}$ — k -е значение ЛОП на выходе демодулятора.

Вычисленное значение $E[L_{эфф}]$ выступает в роли репрезентативного математического ожидания для теоретического гауссовского распределения, удовлетворяющего условию согласованной симметрии. Иными словами, реальное смешанное распределение аппроксимируется нормальным распределением $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, где $\mu = E[L_{эфф}]$ и $\sigma^2 = 2E[L_{эфф}]$. Благодаря этому преобразованию, параметр $E[L_{эфф}]$ может быть напрямую подставлен в рекурсивные уравнения (2, 3) алгоритма ГА для оценки эволюции надёжности через этапы поляризации.

Следует отметить, что аппроксимация гауссовской смеси, характерной для М-PSK и М-QAM, к одномодальному гауссовскому распределению неизбежно вносит определенные отклонения в дисперсию по сравнению с реальным физическим каналом. Однако данная погрешность является допустимой в контексте практического конструирования кода, где конечной целью является не абсолютно точный расчёт вероятности ошибки для каждого отдельного канала, а верное определение набора информационных каналов $\mathcal{A}$. В частности, использование усреднённого параметра $E[L_{эфф}]$ достаточно для корректного отражения дифференциации надёжности и тенденции поляризации синтезированных каналов. Хотя конкретные количественные показатели надёжности могут варьироваться вследствие аппроксимации, чёткое разделение между группами «хороших» и «плохих» каналов сохраняется на приемлемом уровне. Следовательно, данный подход представляет собой обоснованное техническое решение, обеспечивающее баланс между вычислительной сложностью и производительностью системы, что позволяет алгоритму конструирования кода адаптироваться к схемам модуляции высокого порядка без необходимости применения ресурсоёмких методов отслеживания плотности вероятности.

Методика определения оптимальной точки проектирования

Поскольку формируемое методом ГА множество надёжных каналов $\mathcal{A}$ напрямую зависит от входного параметра отношения сигнал/шум, критически важным этапом является его корректный выбор. Для определения этой оптимальной рабочей точки необходимо установить количественную взаимосвязь между надёжностью канала передачи параметром Бхаттачарьи Z [12] и статистическими характеристиками ЛОП, описывающими соответствующие виртуальные битовые каналы.

Исходя из фундаментального теоретического определения, для канала АБГШ параметр Z вычисляется следующим образом:

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{W(y|0)W(y|1)} dy. \quad (4)$$

Воспользовавшись определением ЛОП как (1), получаем соотношение $W(y|1) = W(y|0)e^{-L(y)}$. Подставив это в уравнение (4), выражение для Z можно

переписать в виде математического ожидания по случайной величине y при условии передачи нулевого бита:

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} W(y|0) e^{-\frac{L(y)}{2}} dy = E_{x=0} \left[e^{-\frac{L(y)}{2}} \right]. \quad (5)$$

С математической точки зрения, уравнение (5) представляет собой выражение производящей функции моментов (ПФМ) $M_L(t) = E[e^{tL}]$ вычисленной в точке $t = -1/2$. Применяя допущение о том, что распределение ЛОП подчиняется условию согласованной симметрии, характерному для гауссовского канала, где дисперсия связана с математическим ожиданием $\sigma^2 = 2\mu$ ($\mu = E[L]$), выполним разложение стан-

дартного выражения ПФМ $M_L(t) = e^{(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)}$. Путём подстановки $t = -1/2$ и $\sigma^2 = 2E[L]$ в вышеуказанное выражение, получаем замкнутую аналитическую функцию, описывающую монотонную зависимость параметра Бхаттачарьи от математического ожидания ЛОП:

$$Z(E[L]) = e^{\left(E[L] \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} (2E[L]) \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \right)} = e^{-\frac{E[L]}{4}}. \quad (6)$$

Уравнение (6) устанавливает обратную экспоненциальную зависимость между параметром Бхаттачарьи Z и математическим ожиданием ЛОП. В контексте физической передачи данных средняя величина ЛОП представляет собой величину, монотонно возрастающую в зависимости от отношения сигнал/шум, определяемого в данном исследовании как отношение энергии символа к спектральной плотности мощности шума (E_s / N_0). Следовательно, параметр Z выступает в качестве нелинейной убывающей функции от переменной E_s / N_0 : по мере увеличения энергии сигнала надёжность канала повышается, что приводит к асимптотическому приближению значения Z к 0.

Однако скорость снижения надёжности не является равномерной во всём исследуемом диапазоне E_s / N_0 . Ключевой задачей при конструировании поляризованных кодов является точное определение энергетического уровня, на котором явление поляризации канала протекает наиболее интенсивно, обеспечивая эффективное разделение каналов передачи на две чётко выраженные экстремальные группы. Для решения этой задачи необходимо рассмотреть мгновенную скорость изменения функции надёжности. Данная величина соответствует первой производной параметра Z по управляющей переменной E_s / N_0 . Исследование производной несёт в себе важный физический смысл, поскольку она отражает чувствительность состояния канала передачи к изменениям шумовой обстановки.

Основываясь на данном анализе, предлагаем метод определения оптимальной точки проектирования в позиции, где абсолютное значение производной достигает максимума. Эта точка экстремума соответ-

стует точке перегиба на характеристической кривой Z , обозначая область фазового перехода, где синтезированные каналы осуществляют наиболее быстрый переход из состояния низкой надёжности в состояние высокой надёжности. Локализация рабочей точки в данной позиции способствует наиболее полной реализации процесса поляризации канала, существенно увеличивая разрыв в надёжности между группой информационных и группой замороженных каналов. Это позволяет минимизировать вероятность ошибочного выбора канала в пограничной области принятия решений, тем самым повышая точность определения множества A .

Процесс поиска оптимальной точки проектирования осуществляется посредством моделирования методом Монте-Карло для сканирования параметра Z в интересующем диапазоне E_s / N_0 с последующим применением критерия максимизации крутизны согласно формуле:

$$(E_s / N_0)_{opt} = \arg \max_{E_s / N_0} \left| \frac{dZ(E_s / N_0)}{d(E_s / N_0)} \right|. \quad (7)$$

Значение E_s / N_0 , полученное из уравнения (7), используется в качестве фиксированного входного параметра для инициализации ЛОП в алгоритме ГА, гарантируя построение полярного кода в рабочей точке, где система обладает наилучшей способностью различать качество подканалов. Необходимо отметить, что данные параметра Z , полученные непосредственно в ходе моделирования методом Монте-Карло, представляют собой совокупность дискретных значений, подверженных влиянию стохастического статистического шума. Вследствие этого, применение методов прямого численного дифференцирования часто приводит к нестабильным результатам и затрудняет точное определение глобального максимума. С целью устранения данной проблемы и обеспечения гладкости кривой производной, в исследовании применяется методика аппроксимации кривой. В частности, набор данных моделирования $(E_s / N_0, Z)$ аппроксимируется полиномиальной функцией n -го порядка с использованием метода наименьших квадратов. В данной работе порядок полинома зафиксирован на уровне $n = 7$. Этот выбор является оптимальным компромиссом: он придаёт кривой достаточную гибкость для описания спада параметра Z , но при этом предотвращает возникновение ложных осцилляций, характерных для полиномов высоких степеней:

$$Z(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^{n=7} a_k x^k,$$

где x обозначает величину E_s / N_0 ; a_k — коэффициенты регрессии. При этом производная параметра Бхаттачарьи определяется с высокой точностью посредством вычисления аналитической производной аппроксимирующего полинома:

$$\frac{dZ}{dx} \approx \sum_{k=1}^{n=7} k \cdot a_k x^{k-1}.$$

Данный метод способствует обеспечению точного и достоверного определения точки перегиба $(E_s / N_0)_{opt}$.

Результаты моделирования

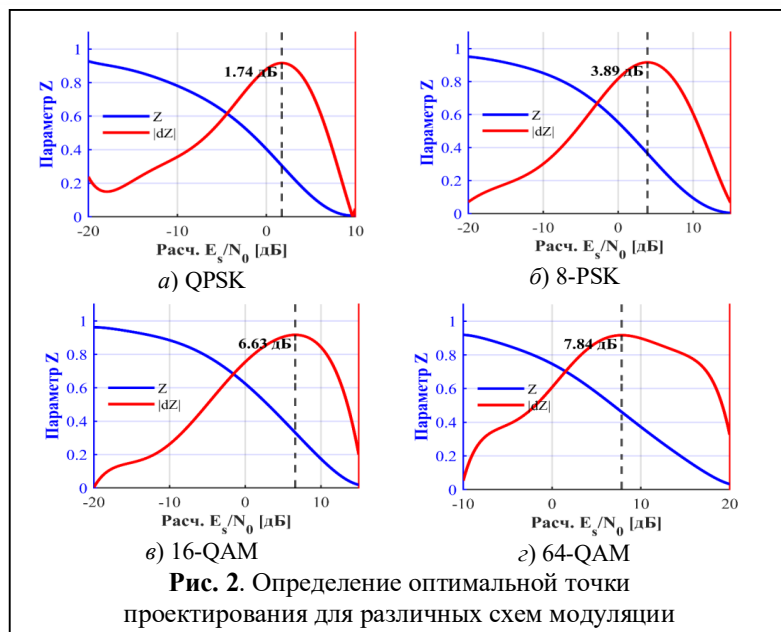
Для точного определения оптимальной точки проектирования $(E_s / N_0)_{opt}$ на основе предложенного алгоритма, было проведено экспериментальное исследование с применением метода моделирования Монте-Карло. Испытания охватывали широкий спектр схем модуляции, варьирующихся от низкого до высокого порядка, включая QPSK, 8-PSK, 16-QAM и 64-QAM. Это позволило выполнить всестороннюю оценку адаптивности метода к различным сигнальным структурам.

В каждой исследуемой точке система осуществляла передачу и демодуляцию блока данных объёмом $N_{bit} = 20000$ бит. Шаг моделирования поддерживался на малом уровне $\Delta = 0,1$ дБ для обеспечения необходимой разрешающей способности (гладкости) при последующем процессе вычисления производной.

Ввиду различий в энергетических характеристиках сигнальных созвездий, исследуемый диапазон E_s / N_0 определялся индивидуально для каждого типа модуляции таким образом, чтобы полностью охватить область вариации параметра Бхаттачарьи. Подробная информация о рабочих диапазонах и сводные результаты исследования для рассматриваемых схем модуляции представлены на рис. 2.

Анализ характеристических кривых показывает, что положение пика производной явно смещается в сторону более высоких энергетических уровней по мере увеличения порядка модуляции. Это отражает более жёсткие требования к отношению сигнал/шум, необходимые для обеспечения надёжности передачи. В частности, теоретическая точка проектирования E_s / N_0 определяется на уровне приблизительно 1,74 дБ для QPSK и возрастает до 7,84 дБ для 64-QAM. Соответствующие промежуточные значения для 8-PSK и 16-QAM составляют 3,89 дБ и 6,63 дБ соответственно.

Изучение поведения параметра Бхаттачарьи (синяя линия) на рис. 2 демонстрирует единую закономерность изменения для всех схем модуляции. В области низких значений E_s / N_0 параметр Z сохраняет значение, близкое к 1, что указывает на практически полное отсутствие надёжности канала и крайне низкую скорость улучшения его качества. Однако, при входе энергетического уровня в переходную область крутизна кривой резко возрастает, что соответствует достижению производной (красная линия) своего глобального максимума, прежде чем параметр Z быстро насыщается, асимптотически стремясь к 0. Пик кривой производной маркирует момент наиболее интенсивного протекания процесса поляризации канала. Хотя в условиях реальной реализации максимальная производительность системы может незначительно колебаться вокруг этой позиции вследствие эффектов



распространения ошибок или конечной длины кода, найденное экстремальное значение играет роль ключевого опорного параметра. Оно позволяет точно локализовать наиболее эффективную рабочую область системы, способствуя сужению пространства поиска и инициализации алгоритма построения полярного кода с высокой степенью достоверности.

Практическая валидация полученных математических оптимумов осуществлялась посредством анализа зависимости вероятности блоковой ошибки (от англ. Block Error Rate — BLER) от выбора расчётного отношения сигнал/шум. Оценка производилась для конфигурации полярного кода $(N, K) = (1024, 512)$ со скоростью кодирования $R = 1/2$ использованием алгоритма декодирования CA-SCL. При этом размер

списка был установлен равным $L = 8$, а длина контрольной суммы CRC составила 16 бит.

Полученные результаты представлены на рис. 3 в виде U-образных кривых производительности. Каждый подграфик на рис. 3 соответствует фиксированному уровню рабочего отношения E_b/N_0 , характерному для каждого типа модуляции. Анализ графиков показывает, что при выборе расчётной точки E_s/N_0 , которая значительно ниже или выше реальных условий канала, значение BLER системы резко возрастает. Это свидетельствует о том, что любое отклонение в оценке надёжности канала приводит к снижению эффективности процесса поляризации.

Напротив, область проектирования, обеспечивающая минимальный уровень BLER, формирует широкую и пологую «впадину» в центральной части графика. Сопоставляя эти данные с полученными выше теоретическими результатами можно заметить, что значения $(E_s/N_0)_{opt}$, определённые методом производной, точно попадают в донную область этих U-образных кривых.

Данный факт подтверждает, что, хотя фактический оптимум может незначительно варьироваться в узком диапазоне, метод поиска экстремума производной предоставляет точный количественный инструмент для определения центральной рабочей точки. Это гарантирует достижение системой полярного кодирования минимального уровня ошибок декодирования без необходимости проведения ресурсоёмкого перебора параметров по всему диапазону E_s/N_0 .

На рис. 4 детализированы результаты моделирования для различных схем модуляции, где каждая кривая соответствует полярному коду, построенному при фиксированном, но отличном от других значениях $(E_s/N_0)_{opt}$.

Детальное изучение кривых производительности выявляет тесную корреляцию между положением характеристики BLER и точностью выбора точки проектирования. Заслуживающим внимания физическим феноменом является согласованность и сходимость кривых в окрестности экстремума производной $(E_s/N_0)_{opt}$. В частности, полярные коды, сконструированные на основе параметров из этой области, не только обеспечивают максимальный энергетический выигрыш, но и имеют тенденцию к совпадению и наложению друг на друга. Эта однородность доказывает, что найденное оптимальное значение представляет собой устойчивую рабочую область. Напротив, сценарии проектирования, значительно отклоняющиеся

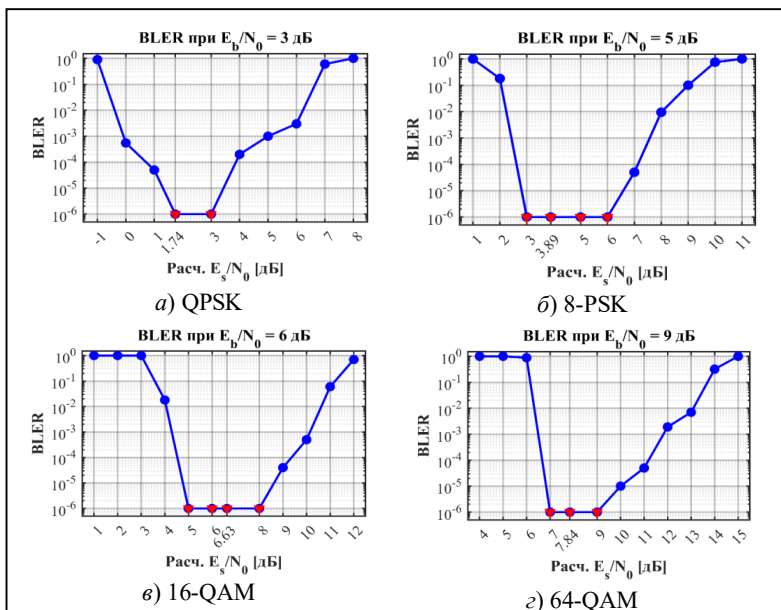
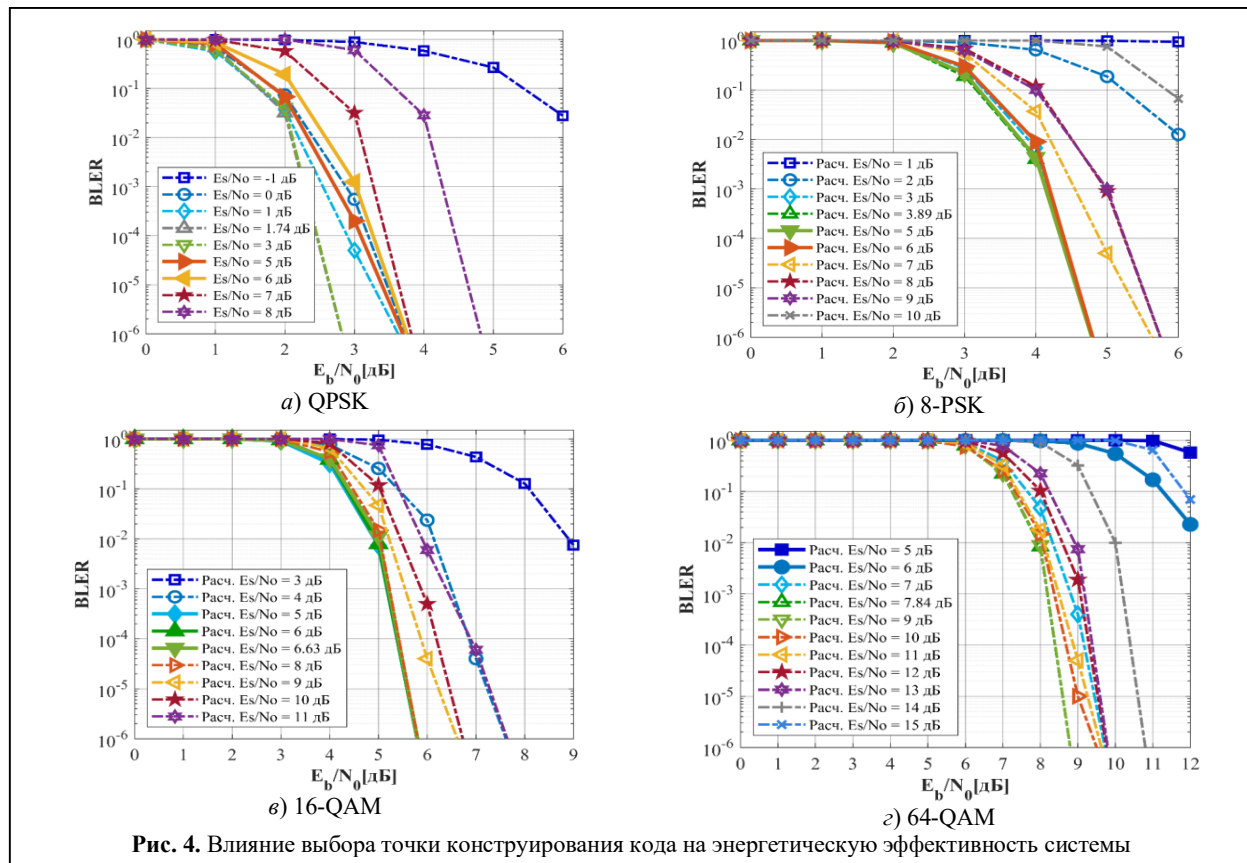


Рис. 3. Зависимость вероятности блоковой ошибки от выбора расчётной точки проектирования



от этой опорной зоны, немедленно демонстрируют деградацию качества декодирования. Это выражается в быстром смещении кривых в сторону более высоких энергий и раннем появлении эффекта «пола ошибки», что подтверждает неэффективность структуры кода при искажённой оценке надёжности канала.

Заключение

В данной статье предложен метод определения оптимальной точки проектирования полярных кодов на основе анализа производной параметра Бхаттачарьи, нацеленный на максимизацию эффективности поляризации канала в рамках алгоритма ГА. Существенным аспектом разработанной методологии для схем модуляции высокого порядка является применение процедуры нормализации реального физического канала к эквивалентному виртуальному каналу BPSK. Результаты моделирования в канале АБГШ подтвердили корректность предложенного подхода и позволили успешно квантифицировать диапазоны параметров, обеспечивающие наилучшую производительность системы.

Полученные количественные результаты гарантируют достижение оптимального баланса между вычислительной сложностью и надёжностью системы связи, создавая основу для эффективного развёртывания полярных кодов в современных телекоммуникационных стандартах.

Литература

1. Arikan E. Channel polarization: A method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input

memoryless channels // IEEE Transactions on Information Theory. 2009. Vol. 55, Iss. 7. Pp. 3051–3073.

2. Трифонов П. Основы помехоустойчивого кодирования. СПб.: Университет ИТМО, 2022. 231 с.

3. Chen P., Xu M., Bai B., Wang J. Design and performance of polar codes for 5G communication under high mobility scenarios // 2017 IEEE 85th Vehicular Technology Conference (VTC Spring). 2017. Pp. 1–5.

4. Hanif M., Ardakani M. Polar codes: bounds on Bhattacharyya parameters and their applications // IEEE Transactions on Communications. 2018. Vol. 66, Iss. 12. Pp. 5927–5937.

5. Mori R., Tanaka T. Performance of polar codes with the construction using density evolution // IEEE Communications Letters. 2009. Vol. 13, Iss. 7. Pp. 519–521.

6. Mori R., Tanaka T. Performance and construction of polar codes on symmetric binary-input memoryless channels // 2009 IEEE International Symposium on Information Theory. 2009. Pp. 1496–1500.

7. Tal I., Vardy A. How to construct polar codes // IEEE Transactions on Information Theory. 2013. Vol. 59, Iss. 10. Pp. 6562–6582.

8. Chung S. Y., Richardson T. J., Urbanke R. L. Analysis of sum-product decoding of low-density parity-check codes using a Gaussian approximation // IEEE Transactions on Information Theory. 2001. Vol. 47, Iss. 2. Pp. 657–670.

9. Trifonov P. Efficient design and decoding of polar codes // IEEE Transactions on Communications. 2012. Vol. 60, Iss. 11. Pp. 3221–3227.

10. Benkhoucha R., Chana I., Hadi Y. Study of the operational SNR while constructing polar codes // International Journal of Electrical and Computer Engineering. 2020. Vol. 10, Iss. 3. Pp. 3200–3207.

11. Vangala H., Viterbo E., Hong Y. A comparative study of polar code constructions for the AWGN channel // arXiv. 2015. arXiv preprint arXiv:1501.02473.

12. El-Abbasy K., Taki Eldin R., El Ramly S., Abdelhamid B. Optimized polar codes as forward error correction coding for digital video broadcasting systems // *Electronics*. 2021. Vol. 10, Iss. 17. 2152.

13. Babar Z., Egilmez Z. B. K., Xiang L., Chandra D., Maunder R. G., Ng S. X., Hanzo L. Polar codes and their quantum-domain counterparts // *IEEE Communications Surveys & Tutorials*. 2019. Vol. 22, Iss. 1. Pp. 123–155.

14. Niu K., Chen K. CRC-aided decoding of polar codes // *IEEE Communications Letters*. 2012. Vol. 16, Iss. 10. Pp. 1668–1671.

15. Fang Z., Gao J., Liu R. A simplified Gaussian approximation algorithm for polar codes // 2017 3rd IEEE International Conference on Computer and Communications (ICCC). 2017. Pp. 2429–2433.

Поступила 5 февраля 2026 г.

English

METHOD FOR CONSTRUCTING POLAR CODES FOR HIGH-ORDER MODULATIONS BASED ON OPTIMAL DESIGN POINT SELECTION

Vu The Duet — Postgraduate Student, Department of Radio Engineering, The Bonch-Bruевич Saint Petersburg State University of Telecommunications.

Evgeny Ivanovich Glushankov — Grand Dr. in Engineering, Professor, Department of Radio Engineering, The Bonch-Bruевич Saint Petersburg State University of Telecommunications.

Address: 193232, Russian Federation, Saint Petersburg, Bolshievikov ave., 22/1.

E-mail: vu.tz@sut.ru

Abstract: In this paper, the construction of polar codes for systems with high-order modulations is performed based on the Gaussian Approximation method, the correctness of operation of which critically depends on the selection of the initializing design signal-to-noise ratio. Inaccurate selection of this parameter significantly hinders the minimization of error probability in a channel with additive white Gaussian noise (AWGN). The aim of the research is the development of a methodology for determining the optimal value of this parameter. A method is proposed, based on the reduction of the real channel to a virtual channel with binary phase shift keying and the analysis of the dependence between the derivative of the Bhattacharyya parameter and the reliability of subchannels. An algorithm for localizing the zone of the most intense polarization has been developed. Simulation modeling in the MATLAB environment confirmed the effectiveness of the approach. As a result, specific optimal design intervals were determined for quadrature and octal phase shift keying, as well as for 16- and 64-position quadrature amplitude modulation, allowing to minimize the block error probability by shifting the operating point to the region of higher energies

Keywords: Polar codes, Gaussian approximation, Bhattacharyya parameter, design signal-to-noise ratio, MATLAB.

References

1. Arikan E. Channel polarization: A method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels. *IEEE Transactions on Information Theory*. 2009. Vol. 55, Iss. 7. Pp. 3051–3073.
2. Trifonov P. *Osnovy pomeshujichivogo kodirovaniya*. SPb.: Universitet ITMO, 2022, 231 p.
3. Chen P., Xu M., Bai B., Wang J. Design and performance of polar codes for 5G communication under high mobility scenarios. 2017 IEEE 85th Vehicular Technology Conference (VTC Spring). 2017. Pp. 1–5.
4. Hanif M., Ardakani M. Polar codes: bounds on Bhattacharyya parameters and their applications. *IEEE Transactions on Communications*. 2018. Vol. 66, Iss. 12. Pp. 5927–5937.
5. Mori R., Tanaka T. Performance of polar codes with the construction using density evolution. *IEEE Communications Letters*. 2009. Vol. 13, Iss. 7. Pp. 519–521.
6. Mori R., Tanaka T. Performance and construction of polar codes on symmetric binary-input memoryless channels. 2009 IEEE International Symposium on Information Theory. 2009. Pp. 1496–1500.
7. Tal I., Vardy A. How to construct polar codes. *IEEE Transactions on Information Theory*. 2013. Vol. 59, Iss. 10. Pp. 6562–6582.
8. Chung S. Y., Richardson T. J., Urbanke R. L. Analysis of sum-product decoding of low-density parity-check codes using a Gaussian approximation. *IEEE Transactions on Information Theory*. 2001. Vol. 47, Iss. 2. Pp. 657–670.
9. Trifonov P. Efficient design and decoding of polar codes. *IEEE Transactions on Communications*. 2012. Vol. 60, Iss. 11. Pp. 3221–3227.
10. Benkhouya R., Chana I., Hadi Y. Study of the operational SNR while constructing polar codes. *International Journal of Electrical and Computer Engineering*. 2020. Vol. 10, Iss. 3. Pp. 3200–3207.
11. Vangala H., Viterbo E., Hong Y. A comparative study of polar code constructions for the AWGN channel. arXiv. 2015. arXiv preprint arXiv:1501.02473. DOI: 10.48550/arXiv.1501.02473.
12. El-Abbasy K., Taki Eldin R., El Ramly S., Abdelhamid B. Optimized polar codes as forward error correction coding for digital video broadcasting systems. *Electronics*. 2021. Vol. 10, Iss. 17. 2152.
13. Babar Z., Egilmez Z. B. K., Xiang L., Chandra D., Maunder R. G., Ng S. X., Hanzo L. Polar codes and their quantum-domain counterparts. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*. 2019. Vol. 22, Iss. 1. Pp. 123–155.
14. Niu K., Chen K. CRC-aided decoding of polar codes. *IEEE Communications Letters*. 2012. Vol. 16, Iss. 10. Pp. 1668–1671.
15. Fang Z., Gao J., Liu R. A simplified Gaussian approximation algorithm for polar codes. 2017 3rd IEEE International Conference on Computer and Communications (ICCC). 2017. Pp. 2429–2433.