Электродинамика, антенны и техника СВЧ

DOI 10.24412/2221-2574-2025-3-41-46 УДК 621.372.5

АППРОКСИМАЦИЯ ДАННЫХ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОТРЕЗКОВ ВОЛНОВОДОВ С ТОНКИМ ИНДУКТИВНЫМ ШТЫРЁМ

Комаров Вячеслав Вячеславович
доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Радиоэлектроника и телекоммуникации, ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.».
E-mail: vyacheslav.komarov@gmail.com

Яськов Сергей Васильевич
студент, ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.».
Адрес: 410054, Российская Федерация, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77.

Аннотация: Рассмотрен алгоритм аппроксимации двухфакторных числовых зависимостей электродинамических параметров прямоугольного волновода с реактивной неоднородностью. Показано, что для этих целей хорошо подходит полином пятого порядка, построенный с привлечением теории регрессионного анализа. В ходе тестирования полученной аппроксимации была достигнута приемлемая для практики погрешность вычислений и было получено хорошее совпадение аналитических, численных и экспериментальных данных. Численное моделирование реактивного микроволнового четырёхполюсника выполнялось методом конечных элементов. Пакет программ, в котором реализован описанный регрессионный алгоритм, является эффективным инструментом визуализации и аппроксимации сложных функциональных зависимостей часто встречаемых при решении задач прикладной электродинамики.

Ключевые слова: волновод, реактивная неоднородность, коэффициент отражения, метод конечных элементов, полиномиальная аппроксимация, численная модель.

Введение

Реактивные неоднородности в виде металлических штырей широко применяются в устройствах согласования и фильтрации электромагнитных (ЭМ) сигналов радиолокационных, коммуникационных и измерительных систем современной микроволновой радиоэлектроники [1–3]. При этом ось металлического штыря ориентирована параллельно силовым линиям электрического поля основной волны прямоугольного волновода (ПрВ) H_{10}, а электродинамические параметры такого четырёхполюсника будут определяться диаметром и высотой штыря, а также расстоянием от его оси до боковой стенки волновода. Конструкция любого устройства, в котором высота штыря совпадает с высотой боковой стенки волновода (индуктивный штырь) является более простой и одновременно электрически более прочной по сравнению с конструкцией, где штырь занимает только часть пространства между верхней и нижней стенкой волновода (ёмкостной штырь). Так как плотность и направление поверхностного тока в индуктивном штыре остаются постоянными в непрерывном режиме распространения ЭМ волны H_{10}, это несколько упрощает расчёт и позволяет сформулировать приближенные аналитические модели такой структуры. В частности, в [4] была разработана такая модель для тонких штырей на методе эквивалентных схем (МЭС). Более точные модели процессов распространения и рассеяния ЭМ волн в волноводе с индуктивным штырём любого диаметра базируются на численных методах анализа этих процессов. К примеру, метод согласования точек и функция Грина были использованы в [5] для нахождения токов в стенках волновода, что дало возможность определить параметры матрицы рассеяния. Применение метода частичных областей в сочетании с функцией Грина позволило построить схемотехническую модель отрезка

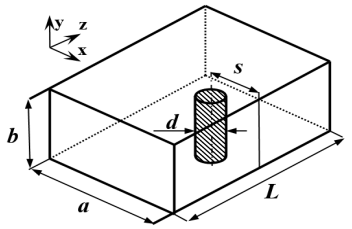


Рис. 1. Прямоугольный волновод с индуктивным штырём

волновода со ступенчатой неоднородностью и индуктивным штырём в [6]. Очевидно, что и другие численные методы вычислительной электродинамики могут быть адаптированы для этих целей.

Данные математического моделирования или измерений различных узлов функциональных устройств микроволновой техники чаще всего представляются в виде графиков или таблиц, что не всего удобно при решении задачи их оптимизации. В случае, когда зависимость какого-либо электродинамического параметра (Z) является функцией одной переменной, например размера устройства (X), то с помощью методов регрессионного анализа [7, 8] зависимость $Z(X)$ может быть аппроксимирована одной из аналитических функций и интегрирована в другие математические модели устройства. Если же имеет место двухфакторная зависимость $Z(X,Y)$, где Y — вторая переменная, то её визуализация и аппроксимация несколько сложнее, но также возможны.

Целью данной работы является применение регрессионного анализа для построения приближенной аналитической модели отрезка прямоугольного волновода с индуктивным штырём в качестве реактивной неоднородности.

Численный анализ реактивного четырёхполюсника

На рис. 1 показан отрезок волновода с металлическим включением в виде штыря диаметром d, высота которого равна боковой стенке волновода b. Расстояние от оси штыря до боковой стенки будет определяться параметром s.

Распределение ЭМ поля в рассматриваемом реактивном четырёхполюснике (рис.1) описывается уравнением Гельмгольца для векторов этого поля, решения которого должны удовлетворять граничным условиям на металлических поверхностях [9]. На входе задаются условия распространения ЭМ волны H_{10} и параметры сигнала, а не выходе — поглощающие граничные условия, имитирующие идеализированную согласованную нагрузку.

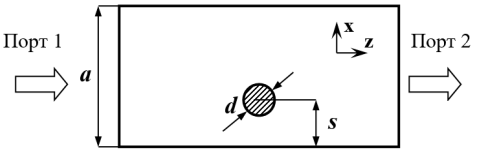
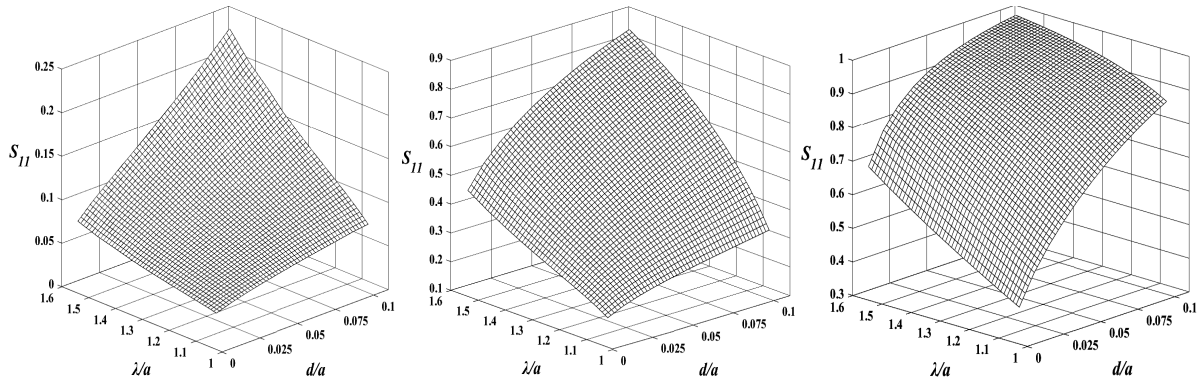


Рис. 2. Двумерная модель

Учитывая отсутствие вариаций E_x-компоненты поля основной волны H_{10} ПрВ мы можем ограничиться рассмотрением области определения задачи анализа плоскостью xz, как показано на рис. 2. Предварительное тестирование данной модели выполнялось с привлечением экспериментальных данных из [4, 10], что позволило выбрать оптимальную плотность сетки треугольных элементов, обеспечивающую необходимую точность вычислений.

Численная реализация алгоритма решения такой задачи проводилась методом конечных элементов (МКЭ), реализованном в пакете программ COMSOL V.5.4. Исследования проводились в пределах вариаций $0{,}01 \le d/a \le 0{,}1$; $1{,}078 \le \lambda/a \le 1{,}597$; $0{,}1 \le s/a \le 0{,}5$, где a — размер широкой стенки ПрВ; λ — длина волны. Результаты численного анализа приведены на рис. 3 в форме двухфакторных зависимостей (3-D поверхностей) $S_{11}(d/a,\ \lambda/a)$, где S_{11} — коэффициент отражения.

Для визуализации представленных на рис. 3 амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) реактивного четырёхполюсника были использованы графические возможности системы математических расчётов MATLAB [11] и первый модуль программы SURF3D, разработанной в данной работе. Второй модуль этой программы позволяет построить аппроксимирующие функции для поверхностей любой сложности.



а) $s/a = 0{,}1$ *б*) $s/a = 0{,}3$ *в*) $s/a = 0{,}5$

Рис. 3. Коэффициент отражения в волноводе с индуктивным штырём

Алгоритм аппроксимации многофакторых числовых зависимостей

Согласно теории регрессионного анализа [7,8] любая многофакторная зависимость может быть аппроксимирована полиномом N-степени, состоящим из q-членов, включая произведения переменных различных порядков и неизвестных регрессионных коэффициентов:

$$Z(X,Y) = u_1X^N + u_2X^{N-1} + u_3Y^N + ... + u_{q-1}Y + u_q, \quad (1)$$

где u_i — неизвестные коэффициенты уравнения (1), причём $i = 1 \ldots q$. К примеру, при $N = 2$, $q = 6$; а при $N = 5$, $q = 21$.

Коэффициенты u_i определяются из решения матричного уравнения [7]:

$$[Q]^T [Q]\{U\} - [Q]^T \{Z\} = 0, \quad (2)$$

где $[Q]$ — матрица термов; $[Q]^T$ — транспонированная матрица; $\{Z\}$ — вектор значений аппроксимируемого параметра; $\{U\}$ — вектор неизвестных коэффициентов уравнения (1).

Уравнение (2) можно переписать следующим образом:

$$\{U\} = [Q]^T \{Z\}[D], \quad (3)$$

где $[D] = \left([Q]^T [Q]\right)^{-1}$ — обратная матрица.

Описанный алгоритм был реализован в программе SURF3D на платформе системы математических расчётов MATLAB, созданной для аппроксимации двухфакторных зависимостей $Z(X,Y)$ полиномами N-степени. Интерфейс программы позволяет вводить числовые массивы данных $Z(X,Y)$, полученные ранее либо теоретически, либо экспериментально. Выходными данными SURF3D являются значения регрессионных коэффициентов u_i и коэффициентов определения R^2 для каждого полинома. Математической основой программы являются матричные уравнения регрессионного анализа и метод наименьших квадратов. Для проведения расчётов с помощью этой программы достаточно вычислительных возможностей персонального компьютера, на котором установлен пакет MATLAB.

В данной работе был проведён анализ влияния порядка полинома N на точность аппроксимации. Для тестирования были использованы результаты измерений S-параметров отрезков ПрВ WR187 с индуктивным штырём, полученные в [10]. Проведённые исследования позволили установить, что полином пятой степени обеспечивает необходимую точность аппроксимации:

$$\begin{aligned} Z = {} & u_1X^5 + u_2X^4Y + u_3X^4 + u_4X^3Y^2 + \\ & + u_5X^3Y + u_6X^3 + u_7X^2Y^3 + u_8X^2Y^2 + \\ & + u_9X^2Y + u_{10}X^2 + u_{11}XY^4 + u_{12}XY^3 + \\ & + u_{13}XY^2 + u_{14}XY + u_{15}X + u_{16}Y^5 + \\ & + u_{17}Y^4 + u_{18}Y^3 + u_{19}Y^2 + u_{20}Y + u_{21}. \end{aligned} \quad (4)$$

Применение полиномов более высокой степени ($N > 5$) с повышенным числом регрессионных коэффициентов u_i оправдано лишь в случае сложных двухфакторных зависимостей $Z(X,Y)$, которые иногда могут иметь место на практике. Как показали многочисленные примеры решения задач прикладной электродинамики, пятая степень полинома даёт возможность достичь необходимой точности аппрок-

симации для большинства таких задач.

Рассмотрим особенности применения указанного полинома (4) для получения приближенных аналитических выражений $S_{11}(d/a, \lambda/a)$ исследуемого четырёхполюсника (рис. 1).

Тестирование полиномиальной модели реактивного четырёхполюсника

Используя численные данные моделирования МКЭ отрезка ПрВ с индуктивным штырём (рис. 3) и программу SURF3D, были получены величины коэффициентов аппроксимации уравнения (4) для различных значений смещения реактивной неоднородности к боковой стенке волновода, определяемого параметром s (см. таблицу 1). Помимо указанных в таблице 1 элементов вектора $\{U\}$ были найдены также промежуточные значения этих коэффициентов, что позволило выполнить дополнительную аппроксимацию зависимостей $u_i(s/a)$ простым полиномом пятого порядка с помощью системы MATLAB [11]:

$$u_i = v_1(s/a)^5 + v_2(s/a)^4 + v_3(s/a)^3 + v_4(s/a)^2 + v_5(s/a) + v_6, \quad 0{,}9229 \le R^2 \le 0{,}9999, \qquad (5)$$

где $v_{1...6}$ — коэффициенты полинома. Всего было установлено 189 коэффициентов v_i.

Для тестирования полиномиального уравнения (4) были использованы результаты измерений отрезков двух стандартных ПрВ: WR90 и WR187, полученные в [4, 10] на различных частотах. Сравнение теоретических и экспериментальных данных (см. таблицу 2) показало достаточно высокую точность аппроксимации с погрешностью, не превышающей 4,3% и обусловленной тем, что численная модель на МКЭ не учитывает потери в металле.

Дополнительная проверка аппроксимации (4) проводилась относительно численных данных, а также аналитической модели на МЭС, построенной в [4]. Коэффициенты полинома (4), приведённые в таблице 1, были получены для волновода WR187 и значений вариаций двух нормированных переменных: d/a = 0,01…0,1 и λ/a = 1,078…1,597 с фиксированным шагом для каждой из них. Поэтому для тестирования полиномиальной модели (4) был выбран другой стандартный волновод WR90, а в качестве исследуемых переменных были взяты произвольно заданные параметры, значения которых попадают в ранее указанные пределы их вариаций.

В таблице 3 показаны результаты вычислений для частотного диапазона 8,2…12,4 ГГц при $d/a = const$; $s/a = const$. В таблице 4 варьируемым параметром является диаметр штыря d при $s/a = const$, $\lambda/a = const$. И, наконец в таблице 5 приведены значения S_{11} для $d/a = const$, $\lambda/a = const$ при вариациях расстояния от оси штыря до боковой стенки волновода

Как показало сравнение всех трёх подходов к расчёту рассматриваемого в работе реак-

Таблица 1. Коэффициенты уравнения (4)

u_i	s/a = 0,1	s/a = 0,2	s/a = 0,3	s/a = 0,4	s/a = 0,5
u_1	4507,576	17450,466	33808,275	54765,443	61950,758
u_2	–532,058	–2663,191	–4248,332	–5294,833	–6117,537
u_3	–994,057	–2907,929	–6817,316	–13144,47	–14914,5
u_4	5,601	–77,701	140,281	253,078	–390,642
u_5	154,412	986,913	896,164	1055,238	3008,377
u_6	36,836	–228,964	387,951	1121,179	159,553
u_7	–1,456	–49,165	24,387	45,902	17,123
u_8	2,895	189,276	–160,342	–137,109	104,587
u_9	–13,195	–322,017	134,26	–109,787	–594,471
u_{10}	–1,726	139,264	–92,479	41,972	276,719
u_{11}	–4,769	–8,593	–21,518	–43,566	–4,498
u_{12}	28,613	55,892	118,769	245,605	26,96
u_{13}	–62,383	–130,985	–250,183	–535,486	–80,272
u_{14}	61,167	140,331	251,162	542,264	119,22
u_{15}	–21,969	–55,231	–94,902	–201,427	–49,464
u_{16}	3,039	4,02	6,969	10,485	0,005
u_{17}	–20,323	–27,277	–47,778	–71,031	0,174
u_{18}	54,186	74,045	131,176	192,023	–1,008
u_{19}	–71,947	–100,371	–180,027	–258,625	2,389
u_{20}	47,596	68,033	123,68	173,811	–2,219
u_{21}	–12,538	–18,411	–33,946	–46,504	0,904

Таблица 2. Коэффициент отражения стандартных волноводов

Размеры	WR90: a = 22,86 мм, d = 1,5875 мм [4]			WR187: a = 47,55 мм, d = 3 мм [10]		
λ/a	1,487319	1,399825	1,312335	1,59725	1,28758	1,078486
S_{11} (эксп.)	0,8937	0,8661	0,8165	0,9304	0,8373	0,7308
S_{11} (4)	0,9011	0,8745	0,8428	0,9182	0,8122	0,6994

Таблица 3. Коэффициент отражения в ПрВ WR90 при $d/a = 0{,}084$, $s/a = 0{,}173$

λ/a	1,5439	1,4582	1,3814	1,3123	1,2498	1,1930	1,1412
S_{11} (МКЭ)	0,3447	0,2955	0,2566	0,2233	0,1940	0,1673	0,1417
S_{11} (4)	0,3457	0,2974	0,2572	0,2228	0,1932	0,1668	0,1418
S_{11} (МЭС) [4]	0,3458	0,2990	0,2616	0,2304	0,2024	0,1772	0,1531

Таблица 4. Коэффициент отражения в ПрВ WR90 при $\lambda/a = 1{,}0936$, $s/a = 0{,}42$

d/a	0,015	0,025	0,035	0,045	0,055	0,065	0,075
S_{11} (МКЭ)	0,3720	0,4314	0,4806	0,5238	0,5628	0,5987	0,6322
S_{11} (4)	0,3704	0,4309	0,4799	0,5226	0,5608	0,5967	0,6302
S_{11} (МЭС) [4]	0,3734	0,4360	0,4889	0,5367	0,5811	0,6231	0,6633

Таблица 5. Коэффициент отражения в ПрВ WR90 при $\lambda/a = 1{,}346$, $d/a = 0{,}052$

s/a	0,12	0,17	0,22	0,27	0,32	0,37	0,42
S_{11} (МКЭ)	0,1108	0,1858	0,2837	0,4008	0,5297	0,6510	0,7421
S_{11} (4)	0,1125	0,1868	0,2834	0,4022	0,5308	0,6506	0,7420
S_{11} (МЭС) [4]	0,1134	0,1911	0,2901	0,4091	0,5393	0,6609	0,7516

тивного четырёхполюсника, наилучшее согласование показывают данные численного моделирования МКЭ и аппроксимации с привлечением (4) и (5). В большинстве случаев, как можно увидеть из таблиц 3–5, для аналитической модели на МЭС [4] также удаётся добиться хорошего совпадения с как численными данными по МКЭ, так и с результатами, полученными с помощью полиномиальной аппроксимации.

Заключение

Таким образом, на примере регулярного отрезка волновода с индуктивным штырём показана возможность построения алгоритма полиномиальной аппроксимации данных его численного моделирования. Рассмотрен случай аппроксимации двухфакторных зависимостей коэффициента отражения как функции частоты и толщины штыря для фиксированной величины смещения штыря к боковой стенке. Дополнительная аппроксимация всех полученных данных в указанных пределах вариаций варьируемых параметров позволила учитывать сразу три переменных: два размера структуры и частоту. Тестирование аналитической модели (4) и (5) показало высокую точность вычислений как относительно экспериментальных данных, взятых из литературы, так и численных данных, установленных в данной работе. Как показали дополнительные исследования, полином пятого порядка (4) даёт возможность добиться достаточно высокой точности аппроксимации для различных двухфакторных зависимостей, встречаемых при решении задач прикладной электродинамики. Пакет программ SURF3D, в основе которого лежит описанный выше алгоритм, является привлекательной альтернативой зарубежным аналогам таких программных средств, как например пакет *TableCurve3D*, успешно применяемый для этих целей [12].

Литература

1. *Шаров Г.А.* Волно-водные устройства сантиметровых и миллиметровых волн. М.: Горячая линия – Телеком, 2016. 640 с.
2. *Rezaiesarlak R., Mehrshahi E.* Full-wave analysis of H-plane waveguide junctions loaded with metallic posts // Int. Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering. 2011. Vol. 21. No. 3. Pp. 288–294.
3. *Albooyeh M., Lotfi Neyestanak A.A., Mirzapour B.* Wideband dual posts waveguide band pass filter // Int. Journal of Microwave and Optical Technology. 2007. Vol.2. No. 3. Pp. 203–209.
4. *Marcuvitz N.*, Ed., Waveguide Handbook. ser. MIT Rad. Lab. New York: McGraw-Hill, 1951. 429 p.
5. *Leviatan Y., Li P.G., Adams A.T., Perini J.* Single-post inductive obstacle in rectangular waveguide // IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques. 1983. Vol. 31. No. 10. Pp. 806–812.
6. *Valagiannopoulos C., Uzunoglu N.K.* Rigorous analysis of a metalic circular post in a rectangular waveguide with step discontinuity of sidewalls // IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques. 2007. Vol. 55. No. 8. Pp. 1673–1684.
7. *Draper N.R., Smith H.* Applied regression analysis. NY.: John Wiley & Sons, 1981. 368 p.
8. *Rawlings J.O., Pantula S.G., Dickey D.A.* Applied regression analysis: a research tool. Berlin: Springer, 1998. 660 p.
9. *Григорьев А.Д.* Методы вычислительной электродинамики. М.: Физмаилит, 2012. 432 с.
10. *Roelvink J., Williamson A.G.* Reactance of hollow, solid, and hemispherical-cap cylindrical posts in rectangular waveguide // IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques. 2005. Vol. 53. No. 10. Pp. 3156–3160.
11. *Дьяконов В.П.* MATLAB. Полное руковод-

ство. М.: ДМК Пресс, 2010. 768 с.

12. *Komarov V.V.* Approximating functions for computation of resonant wavelengths of the reentrant cavity resonator with extended capacitance gap // Int. Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering. 2013. Vol. 23. No. 3. Pp. 285–289.

Поступила 10 июня 2025 г.

English

APPROXIMATION OF NUMERICAL SIMULATION DATA OF WAVEGUIDE PIECES WITH A THIN INDUCTIVE PIN

Vyacheslav Vyacheslavovich Komarov — Grand Dr. in Engineering, Professor, Department of Radioelectronics and Telecommunications, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.
E-mail: vyacheslav.komarov@gmail.com

Sergey Vasilievich Yaskov — Student, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.

Address: 410054, Russian Federation, Saratov, Politekhnicheskaya st., 77.

Abstract: Electromagnetic characteristics of microwave components depend on several factors, including size, frequency range, and the dielectric and magnetic properties of inclusions. In the case of two-factor dependencies, these can be visualized as 3-D surfaces and approximated using N-th order polynomials. This approximation approach is well-suited for integrating numerical or experimental data into mathematical models of microwave devices to solve optimization problems. As demonstrated in this study, such two-factor dependencies can be approximated by a fifth-order polynomial with twenty-one coefficients. An order of N = 5 is sufficient to achieve the required accuracy against numerical or experimental data. The frequency response characteristics of a rectangular waveguide with an inductive stub shifted to its side wall were studied using the finite element method over wide ranges of the structure's size variations. Fifth-order polynomials were used to approximate the numerical analysis results, and the polynomial model was tested for various sizes of the electromagnetic structure under investigation. It was established that for a fixed value of the reactive element's displacement towards the side wall, the total number of approximation coefficients can be reduced from 189 to 21. The algorithm described in this study presents an attractive alternative to commercial software tools, such as TableCurve3D. While TableCurve3D generates a separate equation for each 3-D surface, the proposed polynomial equation is suitable for approximating various 3-D surfaces. The considered approach to developing approximation models can be useful for the computer-aided design of various engineering systems.

Keywords: waveguide, reactive singularity, reflectance, finite element method, polynomial approximation, numerical model.

References

1. *Sharov G.A.* Waveguide devices for centimeter and millimeter waves. Moscow: Goriachaya liniya – Telekom, 2016. 640 p.

2. *Rezaiesarlak R., Mehrshahi E.* Full-wave analysis of H-plane waveguide junctions loaded with metallic posts. Int. Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering. 2011. Vol. 21. No. 3. Pp. 288–294.

3. *Albooyeh M., Lotfi Neyestanak A.A., Mirzapour B.* Wideband dual posts waveguide band pass filter. Int. Journal of Microwave and Optical Technology. 2007. Vol.2. No. 3. Pp. 203–209.

4. *Marcuvitz N.*, Ed., Waveguide Handbook. ser. MIT Rad. Lab. New York: McGraw-Hill, 1951. 429 p.

5. *Leviatan Y., Li P.G., Adams A.T., Perini J.* Single-post inductive obstacle in rectangular waveguide. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques. 1983. Vol. 31. No. 10. Pp. 806–812.

6. *Valagiannopoulos C., Uzunoglu N.K.* Rigorous analysis of a metalic circular post in a rectangular waveguide with step discontinuity of sidewalls. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques. 2007. Vol. 55. No. 8. Pp. 1673–1684.

7. *Draper N.R., Smith H.* Applied regression analysis. NY.: John Wiley & Sons, 1981. 368 p.

8. *Rawlings J.O., Pantula S.G., Dickey D.A.* Applied regression analysis: a research tool. Berlin: Springer, 1998. 660 p.

9. *Grigoriev A.D.* Methods of computational electromagnetics. Moscow: Fizmatlit, 2012. 432 p.

10. *Roelvink J., Williamson A.G.* Reactance of hollow, solid, and hemispherical-cap cylindrical posts in rectangular waveguide. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques. 2005. Vol. 53. No. 10. Pp. 3156–3160.

11. *Dyakonov V.P.* MATLAB. Complete Guide. Moscow: DMK Press, 2010. 768 p.

12. *Komarov V.V.* Approximating functions for computation of resonant wavelengths of the reentrant cavity resonator with extended capacitance gap. Int. Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering. 2013. Vol. 23. No. 3. Pp. 285–289.