Обработка сигналов, информации и изображений

DOI 10.24412/2221-2574-2025-3-30-40 УДК 621.391

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДИСКРЕТНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Калыгин Георгий Отарович
аспирант, ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых».
E-mail: gkalygin@yandex.ru
Адрес: 600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, д. 87.

Аннотация: В статье приведён алгоритм интерполяции спектра гармонического сигнала по формуле преобразования Фурье на конечном числе отсчётов и фильтра Герцеля для сигналов с некратными ДПФ-частотами. Проведён анализ точности определения параметров гармонического сигнала и сложности реализации предложенного алгоритма известных методов оценки амплитуды и начальной фазы. Приведены результаты имитационного моделирования алгоритмов.

Ключевые слова: дискретный гармонический сигнал, амплитуда, начальная фаза, преобразование Фурье, фильтр Герцеля.

Введение

В статье рассматриваются вопросы определения амплитуды A и начальной фазы φ_0 дискретного гармонического сигнала $s(nT)$ с частотой f_c и частотой дискретизации $f_д$, определённого на конечном интервале времени NT

$$s(nT) = A\sin(2\pi f_c nT + \phi_0), \qquad (1)$$

где $n = 0, 1, \ldots, N$; $T = 1/f_д T = 1/f_д$.

Частота f_c известна, стабильна, определяется природой анализируемых данных либо параметрами системы, f_c некратна частоте дискретизации $f_д$. В общем случае амплитуда сигнала может медленно изменяться во времени. Значение начальной фазы φ_0 определяется в момент времени $n = 0$. Задача оценки параметров гармонического сигнала известной частоты встречается при анализе результатов наблюдений различных геофизических полей, например, геомагнитного поля, параметров ионосферы [1], вариации атмосферного давления [1, 2], вертикальной составляющей электрического поля Земли [3]. В этих задачах анализируемыми сигналами являются сигналы на частотах гравитационных солнечных и лунных приливов. Теоретические значения частот приливов и методы их расчёта приведены в [4]. Анализ данных наблюдений геофизических полей [1–3] подтвердил наличие приливных составляющих в геосферах Земли на частотах приливов $S1$ ($1{,}1574\cdot10^{-5}$ Гц), $S2$ ($2{,}3148\cdot10^{-5}$ Гц) и др. В ряде работ, например [1], указывается наличие собственных колебательных мод океана и атмосферы.

Интерес представляет изменение амплитуды сигнала (1) во времени, поэтому анализ необходимо выполнять на минимальном интервале времени, в пределе — на одном периоде сигнала.

Задача определения параметров гармонического сигнала известной частоты на ограниченном интервале времени актуальна при определении дисбаланса амплитуд и фаз при квадратурной обработке сигналов в системах с пакетной передачей данных [5].

Оценка амплитуды и начальной фазы при известной частоте гармонического сигнала может быть выполнена непосредственно по временному ряду или по спектру.

Известные цифровые методы измерения амплитуды, такие как расчёт пикового, среднеквадратичного (СКЗ) или средневыпрямленного значения [6], определение амплитуды амплитудным детектором [7], имеют ограниче-

ния по кратности частот сигналов и частоты дискретизации. В методах расчёта амплитуды, а также фазы дискретных сигналов присутствует методическая погрешность измерения, обусловленная дискретизацией по времени [6]. Для её уменьшения увеличивают интервал измерения. Так ошибка определения СКЗ при анализе сигнала на выходе выпрямителя для узкополосного процесса (учёт одной гармоники на одном периоде) составляет 9,97% [8], при использовании метода, рассмотренного в [9] при определенных соотношениях частот сигнала и дискретизации ошибка может достигать от 0,05 до 0,5%.

Амплитуда и фаза гармонического сигнала однозначно связана со значением спектра на частоте сигнала. Вопросу оценивания спектрального состава сигналов посвящено достаточно много работ. Классическими работами по спектральному анализу являются работы Лайонса [10], Оппенгейма [11], Марпл-мл. [12]. Основные факторы, определяющие точность спектрального анализа — это интервал наблюдения и априорная информация о дискретизированном процессе.

К классическим спектральным методами относят методы, использующие преобразования Фурье. В работах [11, 13] определяется понятие спектра бесконечной дискретной последовательности, рассчитываемое по формулам преобразования Фурье (ПФ). Понятие спектр и ПФ относятся ко всей последовательности, при этом не накладывается никаких ограничений ни на форму, ни на периодичность сигнала. На практике ПФ применяют для частных случаев — расчёт спектра на частоте ω для непериодического, ограниченного во времени сигнала.

Для анализа периодических последовательностей, а также последовательностей конечной длины N применяют дискретное преобразование Фурье (ДПФ) [10–13], позволяющие определить значения спектральных составляющих (коэффициентов ДПФ) для N дискретных значений частот. Для расчёта коэффициентов ДПФ разработано большое число алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), позволяющее сократить число математических операций при расчёте всех N коэффициентов. Для расчёта одного коэффициента ДПФ применяют непосредственно формулы ДПФ, а также алгоритм Герцеля [10, 11, 14], который требует примерно в 4 раза меньше действительных операций умножения, чем по прямой формуле ДПФ [10].

Ограничение ДПФ — эффект «размывания спектра» или «утечка ДПФ» для сигналов, спектр которых содержит частоты, некратные частоте дискретизации, методы борьбы – использование оконных функций, увеличение окна анализа и усреднение на большом числе периодов [10, 11, 15].

В [16] рассматривается метод оценки параметров гармонического сигнала некратной частоты по трём коэффициентам ДПФ, сигнал должен быть узкополосным, оценка амплитуды и начальной фазы выполняется после оценки частоты, метод может использоваться при известной частоте сигнала, этот метод используется далее для сравнения с предлагаемым методом.

И ПФ, и ДПФ дают оценки как амплитудного, так и фазового спектра.

Группа методов спектрального анализа или спектрального оценивания (СО) [12, 13] предназначена для величин, измеряемых в единицах мощности или энергии, спектральной оценкой является спектральная плотность энергии (СПЭ) дискретно-временных рядов Фурье. Некоторые из этих методов можно использовать для оценки амплитуд гармонических составляющих, но методы СО не дают оценок фазового спектра. Для определения амплитуды гармонических составляющих можно использовать классические методы СО — метод периодограмм и коррелограммный, оценки спектральных составляющих, получаемые этими методами, линейно зависят от мощности синусоид, присутствующих в данных. В группе параметрических и непараметрических методов СО линейчатый спектр позволяют получить модифицированный метод Прони и метод Писаренко, так как используемая модель дан-

ных — гармонические сигналы. Метод Прони даёт точные оценки спектра только для сильноразнесённых по частоте составляющих. В методах СО, основанных на оценках собственных векторов, к которым относятся методы MUSIC (классификация множественных сигналов) и EV (собственный вектор), метод Писаренко, отсутствует связь между амплитудами (мощностью) гармонических составляющих и оценками спектра [12].

Так как методы СО не дают оценок фазового спектра, их характеристики не рассматриваются в данной работе.

В статье приведён новый метод оценки параметров дискретного гармонического сигнала известной частоты, некратной частоте дискретизации. Для оценки спектра с некратной частотой (нецелым числом отсчётов на период) используются значения на целом числе отсчётов, получаемые частичными суммами преобразования Фурье или фильтром Герцеля. Точность оценки амплитуды и начальной фазы соизмерима с точностью известных методов, при этом анализ выполняется на более коротком временном интервале. Метод сравнивается с известными алгоритмами по вычислительной сложности и точности получения значений анализируемых параметров. Показано, что для анализа параметров полигармонического сигнала необходима узкополосная фильтрация исходного сигнала.

Частичные суммы преобразования Фурье для анализа параметров гармонического сигнала

Для определения спектра дискретного сигнала $s(nT)$ по определению используется ПФ [13]

$$\dot{S}(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}s(nT)e^{-jn\omega T}. \qquad (2)$$

Применение ПФ в общем случае является физически не реализуемым, так как для расчётов по формуле (2) необходимо использовать все, в том числе и будущие отсчёты сигнала. Формулу (2) можно использовать только для частных случаев, если сигнал содержит фиксированное число ненулевых отсчётов N, тогда (2) имеет вид

$$\dot{S}(\omega,N)=\sum_{n=0}^{N-1}s(nT)e^{-jn\omega T}. \qquad (3)$$

Выражение (3) — частичная сумма (2) для N отсчётов, обозначим её ЧСПФ (частичная сумма преобразования Фурье).

ЧСПФ (3) совпадает с ДПФ [9 - 12]

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(nT)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},$$

для $k=\dfrac{\omega N}{\omega_д}$, т.е. для кратных ДПФ-частот.

Для некратных частот $f_c=\dfrac{f_д}{M}$, М — число отсчётов на периоде сигнала, не целое (далее – сигнал с некратной ДПФ частотой или с некратной частотой) по (3) можно вычислить $\dot{S}(\omega,[M])$ и $\dot{S}(\omega,[M]+1)$, где запись [М] означает целую часть числа М, при этом $\dot{S}(\omega,[M])$ и $\dot{S}(\omega,[M]+1)$ не связаны с коэффициентами ДПФ.

Найдём оценку спектра гармонического сигнала (1) с использованием (3). Запишем гармонический сигнал (1) в виде

$$s(nT)=A\sin(\phi_M n+\phi_0) \qquad (4)$$

или

$$s(nT)=A\frac{e^{j(\phi_M n+\phi_0)}-e^{-j(\phi_M n+\phi_0)}}{2j},$$

где $\phi_M=\dfrac{2\pi}{M}$.

В соответствии с (4)

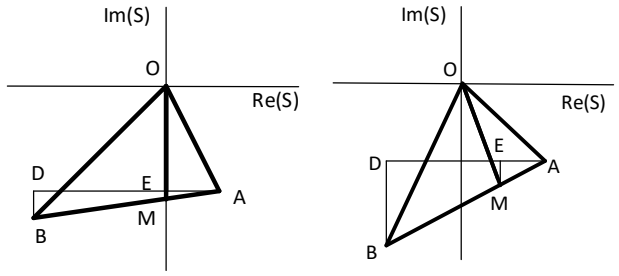
$$\dot{S}(\omega_c,N)=\sum_{n=0}^{N-1}A\frac{e^{j(\phi_M n+\phi_0)}-e^{-j(\phi_M n+\phi_0)}}{2j}e^{-jn\omega T}=$$

$$=-j\frac{A}{2}\sum_{n=0}^{N}(e^{j\phi_0}-e^{-j(2\phi_M n+\phi_0)}).$$

Выполним преобразование $\dot{S}(\omega_c,N)$

$$\dot{S}(\omega_c,N)=-j\frac{A}{2}e^{j\phi_0}(N-e^{-j2\phi_0}\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j2\phi_M n}). \qquad (5)$$

$\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j2\phi_M n}$ — это геометрическая прогрессия; $b_1=1$, $q=e^{-j2\phi_M}$, поэтому



а) $\varphi_0 = 0$ б) $\varphi_0 \neq 0$

Рис. 1. К расчёту спектра сигнала по отсчётам частичных сумм ПФ

$$\sum_{n=0}^{N-1}(e^{-j2\phi_M n}) = \frac{e^{-j2\phi_M N}-1}{e^{-j2\phi_M}-1}.$$

Получаем

$$\dot{S}(\omega_c, N) = -j\frac{A}{2}e^{j\phi_0}(N - e^{-j2\phi_0}\frac{e^{-j2\phi_M N}-1}{e^{-j2\phi_M}-1}). \quad (6)$$

Если частота сигнала кратна частоте дискретизации, т.е. число отсчётов на периоде M — целое число, $N = M$ и $\varphi_M N = 2\pi$, то (6) принимает вид

$$\dot{S}(\omega_c, N) = -j\frac{A}{2}e^{j\phi_0}N = \frac{AN}{2}e^{j(\phi_0-\pi/2)} = S_{ПФ}e^{j\phi_{ПФ}}. \quad (7)$$

Из (7) вытекает связь амплитуды A и начальной фазы φ_0 гармонического сигнала с амплитудой $S_{ПФ}$ и фазой $\varphi_{ПФ}$ ЧСПФ на N точках

$$A = \frac{2S_{ПФ}}{N}, \phi_0 = \phi_{ПФ} + \frac{\pi}{2}. \quad (8)$$

Для определения связи параметров и спектра сигнала в случае некратных частот, можно воспользоваться соотношением спектра аналогового и дискретного сигналов.

Определим спектр соответствующего аналогового гармонического сигнала, используя преобразование Фурье (для аналоговых сигналов). Представим аналоговый сигнал $s(t)$

$$s(t) = A\sin(2\pi f_c t + \phi_0)$$

в виде, удобном для интегрирования, обозначим $t = n_a T$, $-\infty < n_a < \infty$, тогда

$$s(n_a T) = A\sin(2\pi f_c n_a T + \phi_0) = A\sin(\phi_M n_a + \phi_0) =$$
$$= A[\sin(\phi_M n_a)\cos\phi_0 + \cos(\phi_M n_a)\sin\phi_0].$$

Рассчитаем преобразование Фурье для периода сигнала $M_c = MT$

$$\dot{S}_a(\omega_c) = \int_0^{M_c} s(nT)e^{-j\phi_M n}dn = \sin\phi_0\frac{AM_c}{2} - j\cos\phi_0\frac{AM_c}{2} =$$
$$= -j\frac{AM_c}{2}(\cos\phi_0 + j\sin\phi_0) = \frac{AM_c}{2}e^{j(\phi_0-\pi/2)}.$$

Значение спектра гармонического дискретного сигнала равно [13]

$$\dot{S}(\omega_c) = \frac{1}{T}\dot{S}_a(\omega_c) = \frac{AM}{2}e^{j(\phi_0-\pi/2)}. \quad (9)$$

Таким образом, соотношение амплитуды сигнала, числа точек на периоде и значения спектра для гармонического сигнала с некратной частотой (9) совпадает с соотношением для кратных частот (7).

Интерполяция спектра гармонического сигнала некратной ДПФ частоты с использованием ЧСПФ

Для сигнала с некратной частотой используем для нахождения спектра интерполяцию спектра через значения ЧСПФ для числа точек, ближайших к нецелому M — $S(\omega_c, N)$ и $S(\omega_c, N+1)$, где $M = N + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$. На рис. 1 показано расположение этих значений на комплексной плоскости при нулевой и ненулевой начальной фазе ϕ_0, точка A соответствует $S(\omega_c, N)$, точка B — $S(\omega_c, N+1)$, точка M — искомой $S(\omega_c, M)$.

Выражение (3) для $\dot{S}(\omega, N+1)$ можно записать в виде

$$\dot{S}(\omega, N+1) = \sum_{n=0}^{N}s(nT)e^{-jn\omega T} = \sum_{n=0}^{N-1}s(nT)e^{-jn\omega T} +$$
$$+s(NT)e^{-jN\omega T} = \dot{S}(\omega, N) + \Delta\dot{S}. \quad (10)$$

Нахождение ЧСПФ по формуле (10) соответствует интегрированию по формуле прямоугольника, поэтому

$$\dot{S}(\omega, M) = \dot{S}(\omega, N+\varepsilon) = \dot{S}(\omega, N) + \varepsilon\Delta\dot{S}.$$

На рис. 1 $\Delta\dot{S}$ соответствует $\overrightarrow{AB}$, значение спектра найдём из отношения сторон подобных треугольников ABD и AME.

Алгоритм (интерполяция комплексного спектра некратной частоты):

1) $\dot{S}(\omega, A) = \dot{S}(\omega, N) = \mathrm{Re}(A) + j\,\mathrm{Im}(A)$;

2) $\dot{S}(\omega, B) = \dot{S}(\omega, N+1) = \mathrm{Re}(B) + j\,\mathrm{Im}(B)$;

3) $\Delta x = \mathrm{Re}(A) - \mathrm{Re}(B)$;

4) $\Delta y = \mathrm{Im}(A) - \mathrm{Im}(B)$;

5) $\mathrm{Re}(M) = \mathrm{Re}(A) + \varepsilon \Delta x$;

6) $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Im}(A) + \varepsilon \Delta y$;

7) $\dot{S}(\omega, M) = \mathrm{Re}(M) + j\,\mathrm{Im}(M) = |S| e^{-j\varphi}$.

Длина отрезка $|OM|$ — значение амплитудного спектра, угол между положительным направлением оси $Re(S)$ и (OM) — фаза $\dot{S}(\omega, M)$.

8) Расчёт амплитуды и начальной фазы сигнала в соответствии с (8).

Сравнение частичных сумм преобразования Фурье и фильтра Герцеля

Фильтр Герцеля [10, 11, 14] используется для определения спектральной составляющей на фиксированной частоте, значение спектра — это выход ФГ в момент времени точно соответствующий целому числу периодов сигнала плюс один отсчёт. Классический алгоритм Герцеля [10, 14] применяется в случае кратности частоты сигнала и частоты дискретизации, требуется расчёт на длительности одного периода, в этом случае выход ФГ соответствует расчёту коэффициента ДПФ. Алгоритм Герцеля эффективнее расчёта одного коэффициента ДПФ приблизительно в 4 раза — [10].

Для некратных частот используются модификации алгоритма Герцеля. Алгоритм, предложенный в [17] подразумевает расчёт по классической схеме на целом числе периодов, что приводит, в общем случае, к пропорциональному увеличению числа требуемых арифметических операций. В [18] рассматриваются алгоритмы определения спектра для некратных частот на основе «скользящего однобинового параметрического ДПФ (СДПФ-П)» и «обобщённого алгоритма Герцеля». Алгоритмы предполагают получение оценки спектра для некратных частот применением блочной обработки, при этом необходимо выполнять обработку на нескольких блоках (периодах сигнала). Алгоритмы [18] направлены на повышение разрешающей способности спектрального анализа при сохранении устойчивости. Сложность алгоритма пропорциональна числу блоков, используемых при анализе.

Оценим возможность применения алгоритма интерполяции спектра при использовании ФГ. Для этого сравним характеристики ФГ и комплексного нерекурсивного КИХ-фильтра, который соответствует расчёту ЧСПФ по (3).

ФГ реализуется в виде рекурсивного комплексного фильтра ($РФ_{ФГ}$) второго порядка, описывается передаточной функцией [2]

$$H_{ФГ}(z) = \frac{1 - e^{-j\phi_M} z^{-1}}{1 - 2\cos\phi_M z^{-1} + z^{-2}}. \qquad (11)$$

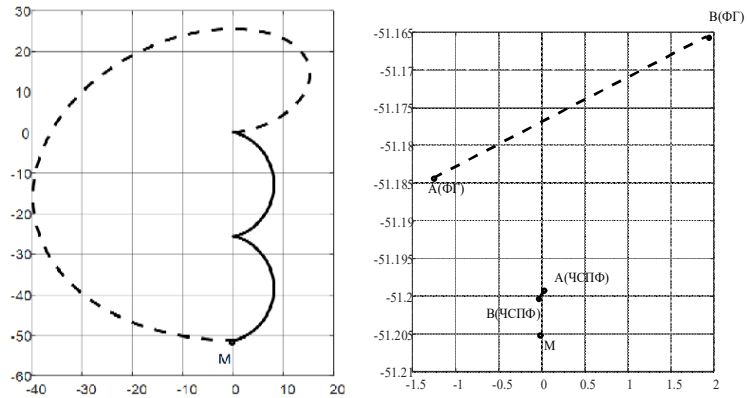
Передаточная функция (11) может быть представлена в виде

$$H_{ФГ}(z) = \frac{1}{1 - e^{j\phi_M} z^{-1}}. \qquad (12)$$

Импульсная характеристика (ИХ) фильтра — обратное Z-преобразование от передаточной функции. Для (12) обратное Z-преобразование — табличное значение [13], получаем

$$\dot{h}_{ФГ}(nT) = h_{ФГ}(nT) e^{j\phi_{ФГ} nT} = 1 e^{j\phi_M n}. \qquad (13)$$

модуль ИХ $h_{ФГ}(nT) = 1$ при любом $n = 0, \ldots \infty$, фаза — линейная



а) расчёт спектра *б*) точки интерполяции

Рис. 2. Расчёт отсчёта спектра для некратных частот ЧСПФ и ФГ

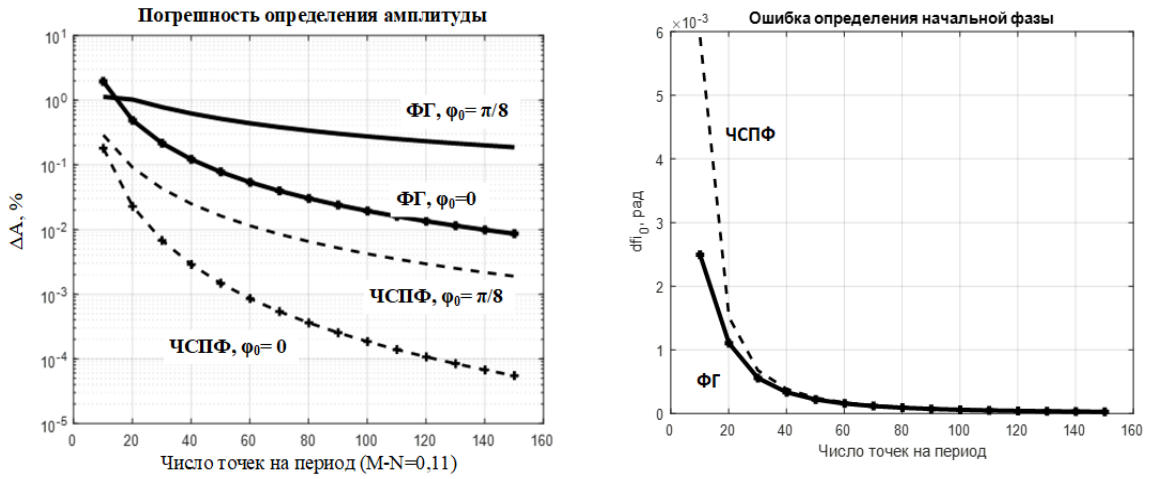


Рис. 3. Характеристики ЧСПФ и ФГ

$$\phi_{ФГ}(nT) = \phi_M n .$$

Передаточная функция КИХ-фильтра для расчёта ЧСПФ имеет вид

$$H_{ПФ,N}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\phi_M n} z^{-n} .$$

Отсчёты комплексной ИХ $h_{ПФ,N}(nT)$ равны коэффициентам фильтра, модуль ИХ равен

$h_{ПФ,M}(nT) = 1$ при $n = 0, \ldots (N-1)$,

фаза

$$\phi_{ПФ,N}(nT) = -\phi_M n . \qquad (14)$$

Импульсные характеристики $РФ_{ФГ}$ (13) и $НФ_{ПФ,N}$ (14) отличаются только знаком фазовых характеристик.

Для кратных частот значение спектра на выходе ФГ берут на (N+1)-м отсчёте. Из-за различия знака фазы ИХ пути достижения точки спектра при расчёте по формуле ДПФ и ФГ различны и совпадают только в одной точке, соответствующей коэффициенту ДПФ.

На рис. 2 приведены комплексные значения расчёта ЧСПФ и выхода ФГ для некратных частот с нулевой начальной фазой φ_0.

На рис. 2 видно, что для некратных частот значения на выходе ФГ, так же, как и для ЧСПФ не совпадают с истинным значением спектра (точка М). Так как ФГ эффективнее ДПФ (и ЧСПФ) по вычислительным затратам, были проведены расчёты для оценки точности определения амплитуды и фазы гармонического сигнала с использованием алгоритма интерполяции комплексного спектра при использовании ЧСПФ и ФГ. Результаты моделирования приведены на рис. 3.

Точность расчёта амплитуды с использованием ЧСПФ выше по сравнению с ФГ, с увеличением М различие увеличивается — для М ≈ 10 различие составляет 1 порядок, для М ≈ 100 — два порядка.

Точность также зависит от значения ε, которое определяется из соотношения $M = N + \varepsilon$. Эта зависимость иллюстрируется рис. 4 — чем меньше ε (М ближе к целому числу), тем выше точность. Ошибка максимальна при $\varepsilon \approx 0{,}5$.

Характеристики методов определения параметров гармонического сигнала

Для сравнения предложенного алгоритма определения параметров гармонического сигнала с известными методами были выполнены расчёты ошибки определения амплитуды и начальной фазы. Были использованы следующие алгоритмы:

1) Расчёт СКЗ по формуле [6]

$$U = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|s(nT)\right|^2} .$$

Определение амплитуды по значениям СКЗ для числа отсчётов, ближайших к целому числу периодов

$$A = U_{макс} = \sqrt{2}U .$$

В таблице 1 приведены относительная

Таблица 1. Характеристики ЧСПФ и алгоритма СКЗ

Характеристика	Алгоритм (1 период)	Число точек анализа СКЗ				
		103	409	817	868	919
ΔA/A, %	$2.0 \cdot 10^{-4}$	0,43	0,05	0,004	$50 \cdot 10^{-4}$	0,002
$N_{сл/ум}$	103·2=206	103	410	818	869	920

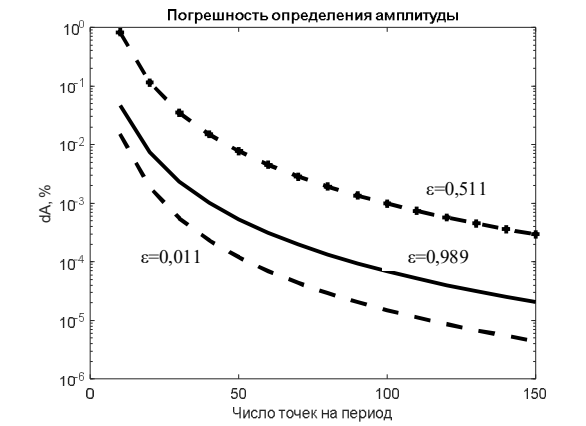


Рис. 4. Влияние $\varepsilon = M - N$

ошибка определения амплитуды $\Delta A/A$, % и вычислительные затраты ($N_{сл/ум}$ — число операций действительного сложения и умножения) для $M = 102{,}11$.

Точность при расчёте СКЗ сильно зависит от частоты сигнала, точный результат соответствует числу точек, равному целому числу периодов. Сложность анализа СКЗ пропорциональна числу точек анализа.

2) Определение пикового значения сигнала.

Пиковое значение $U_п$ гармонического сигнала определяется как максимальное значение модуля сигнала [6]. Алгоритм вычисления максимума итерационный, на каждой итерации модуль отсчёта сравнивается с текущим максимальным значением. Вычисления заканчиваются, если на заданном интервале времени (не менее 1–2 периодов сигнала) значение максимума не изменяется. Операция сравнения выполняется вычитанием и оценкой знака результата. Число операций сложения (вычитания) $N_{сл} = ML$, где L — число периодов сигнала. Число операций умножения равно 0. Амплитуда сигнала равна пиковому значению $A = U_п$.

В таблице 2 приведены результаты анализа для $M = 102{,}51$. Длина интервала оценки варьировалась от одного до 50 периодов сигнала.

Точность при нахождении пикового значения зависит от частоты сигнала, а также от начальной фазы, пиковое значение не изменяется после совпадения отсчёта с максимальным значением сигнала, например, при $\varphi_0 = \pi/2$, максимальное значение, точно соответствующее амплитуде сигнала, будет иметь первый отсчёт.

3) Алгоритм интерполяции параметров гармонического сигнала по коэффициентам ДПФ [16].

Оценка амплитуды и фазы выполняется по трём коэффициентам ДПФ, соответствующих максимальному коэффициенту X_k и двум соседним X_{k-1} и X_{k+1}. Оценка частоты $\alpha_и$ для известной частоты выполняется исходя из значения относительной частоты сигнала и относительных частот ДПФ.

Оценка амплитуды сигнала по формуле (3)

Таблица 2. Характеристики ЧСПФ и алгоритма «пиковое значение»

Характеристика	Алгоритм (1 период)	Число периодов (L)						
		1	10	20	30	35	40	50
ΔA/A, %	$8.0 \cdot 10^{-4}$	4.2e–02	3.6e–03	3.6e–03	1.6e–03	2.0e–04	1.0e–05	1.0e–05
$N_{сл}$	103·2=206	102	1025	2050	3075	3587	4100	5025
$N_{ум}$	103·2=206	-	-	-	-	-	-	-

Таблица 3. Характеристики ЧСПФ и алгоритма интерполяции коэффициентов ДПФ

Характеристика	Алгоритм (1 период)	ДПФ-128	ДПФ-256	ДПФ-512	ДПФ-1024	ДПФ-2048	ДПФ-4096
ΔA/A,%	$6.0 \cdot 10^{-4}$	1.86	1.78	0.002	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$6.4 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$
$\Delta\varphi_0$, рад	$1.0 \cdot 10^{-4}$	0.03	0.006	$1.7 \cdot 10^{-6}$	$2.8 \cdot 10^{-6}$	$3.0 \cdot 10^{-6}$	$3.0 \cdot 10^{-6}$
$N_{компл.\ сл/ум}$	103	384	768	1536	3072	6144	12288

Таблица 4. Характеристики алгоритма ЧСПФ при наличии шумов и полосовой фильтрации

Характеристика	ОСШ исходного сигнала, дБ						
	0	12	24	36	48	60	Без шума
$\Delta A/A$, %	7,7	1,9	0,42	0,12	0,03	7,1e–03	1,3e–04
$\Delta A_ф/A_ф$, %	0,025	6,23e–03	1,6e–03	4,9e–04	4,8e–04	2,0e–04	1,3e–04

[16]

$$X_{m(п)} = \frac{2}{NW(0)}\left[X_k - \frac{1}{4}\frac{\left(X_{k-1} - X_{k+1}\right)^2}{X_{k-1} - 2X_k + X_{k+1}}\right].$$

Оценка начальной фазы по формуле (6) [16]

$$\phi_{u(k)} = \arg\left\{X\left(jk\right)\right\} + \frac{\pi}{2} - \pi \cdot \alpha_i.$$

Расчёт проводился при варьировании числа точек ДПФ. Результаты для сигнала с M = 102,41 приведены в таблице 3, $\Delta\varphi_0$ — ошибка определения начальной фазы в радианах, $N_{компл.\ сл/ум}$ — число операций комплексного сложения и умножения. Так как в алгоритме [16] необходимо выполнять расчёт трёх коэффициентов ДПФ, число операций в 3 раза больше, чем в алгоритме интерполяции ЧСПФ, и пропорционально числу точек анализа.

Точность, сопоставимая с точностью предложенного алгоритма достигается при анализе на 1024 точках, т.е. примерно на 10 периодах сигнала, число арифметических операций при этом в 30 раз больше.

Оценка параметров гармонического сигнала в шумах

Оценка параметров реальных сигналов выполняется в условиях наличия случайной шумовой составляющей. Обычно при наличии шумов выполняется усреднение результатов измерений параметров на нескольких интервалах наблюдений, при этом накладывается требование постоянства параметров шума (математического ожидания и дисперсии). В случае изменения амплитуды самого сигнала усреднение вносит дополнительную ошибку, зависящую от интервала усреднения.

Для повышения отношения сигнал/ шум (ОСШ) можно использовать фильтрацию сигнала. Известно, что для стационарного некоррелированного случайного процесса установившуюся дисперсию шума на выходе фильтра можно оценить по формуле (2.27) [13]

$$\sigma^2_{вых} = \sigma^2_{вх}\sum_{n=0}^{\infty} h_n^2,$$

где $\sigma^2_{вых}$ — дисперсия входного сигнала; h_n — отсчёты импульсной характеристики фильтра.

В таблице 4 представлены результаты моделирования смеси гармонического сигнала и шума (одна и та же реализация) без фильтрации ($\Delta A/A$) и сигнала на выходе фильтра ($\Delta A_ф/A_ф$). При моделировании использован нерекурсивный полосовой фильтр, повышающий ОСШ на 46,5 дБ.

В пределах одного периода сигнала параметры случайного сигнала можно считать постоянными, для различных фрагментов случайного процесса, они будут изменяться. Были выполнены расчёты для 100 реализаций шума при ОСШ 0 дБ, максимальное значение $\Delta A_ф/A_ф$ равно 0,95%.

При известном ОСШ анализируемого сигнала можно регулировать точность оценки параметров сигнала выбором параметров полосового фильтра

Анализ параметров полигармонического сигнала

Если сигнал (1) является компонентом полигармонического сигнала

$$x(nT) = \sum_{i=1}^{K} A_i \sin(2\pi f_i nT + \phi_{0i}) \qquad (15)$$

все гармонические сигналы для $i \neq k$, где f_k — частота анализируемого сигнала, являются помехой. Величина ошибки определения амплитуды и фазы зависит от соотношений амплитуд A_k/A_i и частот f_k/f_i. На рис. 5 приведены зависимости точности определения амплитуды для двух компонент (15) при изменении амплитуды второго сигнала (A_2/A_1) и ча-

стоты второго сигнала (f_k/f_i.), пунктирной линией на рис. 5 обозначена точность оценки амплитуды моногармонического сигнала. Точность определения параметров компонента полигармонического сигнала, сопоставимую с точностью оценки параметров моногармонического сигнала, можно получить только для сильно разнесённых по частоте сигналов, а также для помех с малой амплитудой. Для устранения влияния составляющих (15) необходимо выделить сигнал с частотой f_k с помощью полосового фильтра с центральной частотой f_k, фильтр должен максимально ослаблять ближайшую частотную составляющую (15).

При использовании полосовой фильтрации точность определения параметров одной составляющей полигармонического сигнала сопоставима с точностью определения параметров моногармонического сигнала.

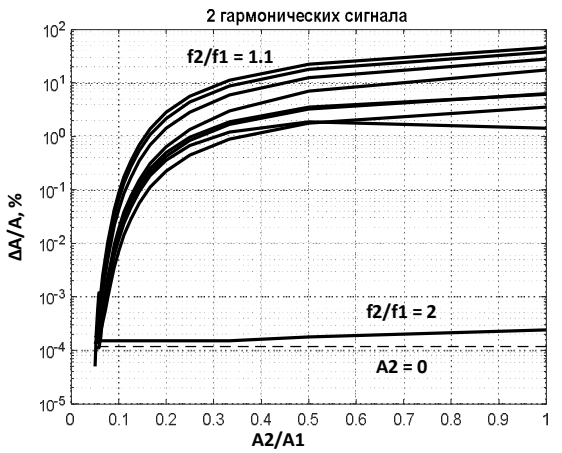


Рис. 5. Характеристики ЧСПФ при наличии второго гармонического сигнала

Заключение

Рассмотренный в статье метод позволяет получить оценки амплитуды и начальной фазы гармонического сигнала известной частоты при анализе на одном периоде, при этом для получения сопоставимой точности другими методами необходимо увеличить интервал анализа в 10 и более раз. Метод позволяет определять изменение амплитуды сигнала во времени.

Предложенный метод интерполяции спектра можно применять при расчёте по формуле преобразования Фурье или при использовании фильтра Герцеля, выбор между ЧСПФ и ФГ зависит от требований к точности оценки и сложности анализа.

В статье приведены результаты имитационного моделирования для нескольких методов оценки амплитуды и фазы гармонического сигнала. Так как точность для всех рассмотренных методов зависит от частоты сигнала, степени близости числа отсчётов на периоде к целому числу и от начальной фазы, метод анализа для конкретного сигнала нужно выбирать с учётом сложности реализации.

При анализе полигармонического сигнала, а также в присутствии шумов необходимо выполнить полосовую фильтрацию, параметры фильтра определяют точность оценки амплитуды и начальной фазы анализируемого сигнала.

Дальнейшие работы по использованию предложенного метода интерполяции спектра связаны с анализом характеристик алгоритма для суммы сигналов с близко разнесёнными частотами.

Литература

1. *Хабитуев Д.С., Шпынев Б.Г., Татарников А.В., Щеглова Е.С.* Влияние гравитационного прилива Солнца и Луны на динамику параметров атмосферы, ионосферы и океана // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2017. Т. 14. № 5. С. 321–339.

2. *Адушкин В.В., Спивак А.А., Рыбнов Ю.С., Харламов В.А.* Приливные волны и вариации давления в атмосфере земли // Геофизические исследования. 2017. Т. 18. № 3. С. 67–80.

3. *Ефимов В.А.* Структура вариаций электрического поля Земли в диапазоне частот $1\cdot10^{-5}\div2.5\cdot10^{-5}$ Гц // Динамика сложных систем. 2015. №2. С. 39–45.

4. *Мельхиор П.* Земные приливы. М.: Мир, 1968. 482 с.

5. *Куликов Г.В., Лелюх А.А.* Влияние амплитудного и фазового разбаланса квадратур на помехоустойчивость когерентного приёма сигналов с квадратурной амплитудной модуляцией // Российский технологический журнал. 2021. №9(1). С. 29–37.

6. *Мирский Г.Я.* Электронные измерения. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1986. 440 с.

7. Автоматизация производства и промышленная электроника / ред. *А.И. Берг, В.А. Трапезни-*

ков. Т.1. А–И. М.: Советская энциклопедия, 1962. 524 с.

8. *Широков Ю.* Измерение эффективных значений напряжений и токов // Современная электроника и технологии автоматизации. 2021, №1. С. 67–70.

9. *Аванесян Г.Р.* Фазовый метод определения среднеквадратического значения гармонического процесса // Журнал радиоэлектроники. 2015. №4. С. 1–17.

10. *Лайонс Р.* Цифровая обработка сигналов. 2-е изд. М.: ООО «Бином-Пресс», 2009. 656 с.

11. *Оппенгейм А., Шаффер Р.* Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2012. 1048 с.

12. *Марпл С.Л. мл.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. М: Мир, 1990. 584 с.

13. *Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н.* Цифровая обработка сигналов: учеб. пос. для ин-тов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1990. 256 с.

14. *Goertzel,G.* An Algorithm for the Evaluation of Finite Trigonometric Series // American Math. 1958. Vol. 65. Pp. 34–35.

15. *Bracewell R.* The Fourier Transform and Its Applications. USA: McGraw-Hills, 1986. 474 p.

16. *Глинченко А.С., Тронин О.А.* Повышение точности интерполяционных оценок параметров сигналов при спектрально-весовых измерениях // Цифровая обработка сигналов. 2011. №1. С. 7–12.

17. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов; пер. М.: Мир, 1978. 848 с.

18. *Пономарев В.А., Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарева Н.В.* Обобщение алгоритмов Герцеля и скользящего параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. 2014. №1. С. 3–11.

19. *Галанина Н.А., Дмитриев Д.Д., Ахметзянов Д.И.* Алгоритм Герцеля для спектрального анализа сигналов // Программные системы и вычислительные методы. 2013. №4. С. 376–383.

Поступила 18 марта 2025 г.

English

DETERMINATION OF PARAMETERS OF DISCRETE HARMONIC SIGNALS

Georgy Otarovich Kalygin — Postgraduate Student, Vladimir State University named after A.G. and N.G. Stoletovs.

E-mail: gkalygin@yandex.ru

Address: 600000, Russian Federation, Vladimir, Gorky St., 87.

Abstract: The use of classical spectral analysis methods—namely, the Discrete Fourier Transform (DFT) and its efficient implementation, the Fast Fourier Transform (FFT)—does not provide the required accuracy for determining the parameters of a harmonic signal of known frequency when the signal frequency and sampling rate are non-integer multiples, nor when analyzing a polyharmonic signal. In these methods, improving accuracy necessitates a reduction in frequency resolution. When estimating the parameters of a single harmonic signal, the number of computational operations increases linearly with the length of the analyzed sequence. This article analyzes the dependence of spectral analysis results on harmonic signal parameters for arbitrary (both integer and non-integer multiple) ratios of signal frequency to sampling frequency. It is demonstrated that both the Fourier transform and the Goertzel filter can be employed for parameter estimation. For integer multiples (coherent sampling), the parameters are determined directly from the spectral analysis results. For non-integer multiples, where the number of samples per period M is not an integer, algorithms are proposed to approximate the signal parameters based on calculations at points N and N+1, where N < M < N+1. These calculations utilize one or several signal periods, with the total number of analyzed points not exceeding 100-150, which significantly reduces computational costs. The derived analytical relationships are confirmed by simulation results. Recommendations are provided for selecting the number of analysis points based on the ratio of the signal frequency to the sampling frequency. The accuracy of amplitude and phase determination is controlled by the number of samples used.

Keywords: meteorological radar, statistical processing, law of signal amplitude distribution, remote sensing.

References

1. *Khabituev D.S., Shpynev B.G., Tatarnikov A.V., Shcheglova E.S.* The influence of the gravitational tide of the Sun and Moon on the dynamics of the parameters of the atmosphere, ionosphere and ocean. Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa. 2017. Vol. 14. No. 5. Pp. 321–339.

2. *Adushkin V.V., Spivak A.A., Rybnov Yu.S., Kharlamov V.A.* Tidal waves and pressure variations in the Earth's atmosphere. Geofizicheskie issledovaniya. 2017. Vol. 18. No. 3. Pp. 67–80.

3. *Efimov V.A.* The structure of variations of the Earth's electric field in the frequency range $1\cdot10^{5}\div2.5\cdot10^{-5}$ Hz. Dinamika slozhnykh sistem. 2015. No. 2. Pp. 39–45.

4. *Mel'khior P.* Earth tides. Moscow: Mir, 1968. 482 p.

5. *Kulikov G.V., Lelyukh A.A.* Influence of amplitude and phase quadrature imbalance on noise immunity of coherent reception of quadrature amplitude modulated signals. Rossiyskiy tekhnologicheskiy zhurnal. 2021. No. 9(1). Pp. 29–37.

6. *Mirskiy G.Ya.* Electronic measurements. 4th publ. Moscow: Radio i svyaz', 1986. 440 p.

7. Industrial Automation and Electronics. Edited by *A.I. Berg*, *V.A. Trapeznikov.* Volume 1. A–I. Moscow: Soviet Encyclopedia Publishing House, 1962. 524 p.

8. *Shirokov Yu.* Measurement of effective voltage and current values. Sovremennaya elektronika i tekhnologii avtomatizatsii. 2021. No. 1. Pp. 67–70.

9. *Avanesyan G.R.* Phase method for determining the root mean square value of a harmonic process. Zhurnal radioelektroniki. 2015. No. 4. Pp. 1–17.

10. *Lyons R.* Digital signal processing. 2nd publ. Moscow: OOO «Binom-Press», 2009. 656 p.

11. *Oppengeym A., Shaffer R.* Digital signal processing. Moscow: Tekhnosfera, 2012. 1048 p.

12. *Marpl S.L. jr.* Digital spectral analysis and its applications. Moscow: Mir, 1990. 584 p.

13. *Goldenberg L.M., Matyushkin B.D., Polyak M.N.* Digital signal processing: textbook for institutes. 2nd publ. Moscow: Radio i svyaz', 1990. 256 p.

14. *Goertzel G.* An Algorithm for the Evaluation of Finite Trigonometric Series. American Mathematical Monthly. 1958. Vol. 65. Pp. 34–35.

15. *Bracewell R.* The Fourier Transform and Its Applications. USA: McGraw-Hill, 1986. 474 p.

16. *Glinchenko A.S., Tronin O.A.* Improving the accuracy of interpolation estimates of signal parameters in spectral-weight measurements. Tsifrovaya obrabotka signalov. 2011. No. 1. Pp. 7–12.

17. *Rabiner L., Gould B.* Theory and application of digital signal processing. Moscow: Mir, 1978. 848 p.

18. *Ponomarev V.A., Ponomareva O.V., Ponomarev A.V., Ponomareva N.V.* Generalization of the Goertzel algorithm and sliding parametric discrete Fourier transform. Tsifrovaya obrabotka signalov. 2014. No. 1. Pp. 3–11.

19. *Galanina N.A., Dmitriev D.D., Akhmetyanov D.I.* Goertzel algorithm for spectral analysis of signals. Programmnye sistemy i vychislitel'nye metody. 2013. No. 4. Pp. 376–383.