Электродинамика, антенны и техника СВЧ

DOI 10.66032/2221-2574-2024-1-3-16-24 УДК 621.371

ОБОБЩЁННЫЕ, ОБЩИЕ И ЧАСТНЫЕ ФОРМУЛЫ ПОПЕРЕЧНЫХ КОМПОНЕНТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ГИРОТРОПНЫХ ВОЛНОВОДОВ, УЧИТЫВАЮЩИЕ ТЕПЛОВЫЕ ПОТЕРИ*

Итигилов Гарма Борисович
кандидат технических наук, доцент, доцент ФГБОУ ВО «Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления»
E-mail: gablz@mail.ru

Ширапов Дашадондок Шагдарович
доктор физико-математических наук, профессор, профессор ФГБОУ ВО «Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления»
E-mail: shir48@mail.ru

Кравченко Вячеслав Александрович
кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой ФГБОУ ВО «Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления»
E-mail: krawyach@mail.ru

Адрес: 670013, Российская Федерация, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, д. 40В, стр. 1

Аннотация: Получены обобщённые формулы поперечных компонент электромагнитного поля, учитывающие тепловые потери, для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечных сечений при произвольном намагничивании. Получены общие соотношения этих же компонент электромагнитного поля, учитывающие тепловые потери, для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечных сечений при нормальном, касательном и продольном намагничиваниях. Из общих формул выведены частные формулы поперечных компонент, учитывающие тепловые потери, для гиротропного эллиптического волновода при нормальном, касательном и продольном намагничиваниях. Полученные частные соотношения поперечных компонент электромагнитного поля, учитывающих тепловые потери, необходимые при определении граничных условий соответствующих краевых задач для частных уравнений Гельмгольца гибридных *HE*- и *EH*- волн для нормально, касательно и продольно намагниченных гиротропных эллиптических волноводов, а также при исследований структуры электромагнитного поля основных мод распространяющихся электромагнитных волн в этих волноводах.

Ключевые слова: компоненты электромагнитного поля, гиротропный эллиптический волновод, намагничивание, форма поперечного сечения, тепловые потери, краевая задача.

Введение

В сверхвысокочастотных приборах [1–5], также в гиротропных волноводах, используются ферриты [6, 7], намагниченные нормально, касательно и продольно направлению распространения электромагнитной волны. В работе [8] было экспериментально установлено, что значения тангенсов угла диэлектрических потерь ферритов δ, используемых в сверхвысокочастотных устройствах, включая гиротропные волноводы, зависят как от состава, так и структуры материалов изготовления. В частотности, для феррошпинели значение δ находится в диапазоне $(2{,}5–25)\cdot 10^{-4}$, что является до-

* Статья подготовлена по материалам доклада на Всероссийской конференции «Армандовские чтения 2024»

статочно большим. Следовательно, в гиротропных волноводах имеют место значительные тепловые потери, оказывающие влияние как на основные параметры самих волноводов, так и на характеристики распространяющихся в них электромагнитных волн, а также на структуры электромагнитного поля основных мод, зависящих от степени эллиптичности и величины намагниченности.

Для установления степени и характера влияния джоулева нагрева на основные параметры гиротропных волноводов и характеристики электромагнитных волн, а также на структуры электромагнитного поля основных мод необходимо поставить и решить краевые задачи для частных уравнений Гельмгольца гибридных электромагнитных *EH*- и *HE*- волн гиротропных волноводов с разными формами ортогональных поперечных сечений и при различных намагничиваниях, учитывающие тепловые потери.

В частности, для постановки граничных условий и решения краевых задач для частных уравнений Гельмгольца нормально, касательно и продольно намагниченных гиротропных эллиптических волноводов, учитывающих тепловые потери, должны быть определены соответствующие поперечные компоненты электромагнитного поля.

Таким образом, основной целью данной работы является определение частных формул вычисления поперечных компонент электромагнитного поля, учитывающих тепловые потери, для гиротропных эллиптических волноводов при нормальном, касательном и продольном намагничиваниях.

Для достижения поставленной цели необходимо решение следующих задач:

1) Определение обобщённых формул поперечных компонент электромагнитного поля, учитывающих тепловые потери, для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечных сечений при произвольном намагничивании;

2) Определение общих формул поперечных компонент электромагнитного поля, учитывающих тепловые потери, для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечных сечений при нормальном, касательном и продольном намагничиваниях;

3) Определение частных формул вычисления поперечных компонент электромагнитного поля для гиротропных эллиптических волноводов, учитывающих тепловые потери, при нормальном, касательном и продольном намагничиваниях.

1. Обобщённые формулы поперечных компонент электромагнитного поля гиротропных волноводов с тепловой потерей

Для устоявшегося по времени процесса без наведённых токов и зарядов система дифференциальных уравнений Максвелла имеет вид [9]

$$\begin{cases} rot\overline{H} = j\omega\varepsilon'\overline{E}, \\ rot\overline{E} = -j\omega\overline{B}, \\ div\overline{D} = 0, \\ div\overline{B} = 0, \end{cases}$$

где $\overline{H}$ и $\overline{E}$ — напряжённости магнитного и электрического полей соответственно; $\overline{B} = \tilde{\mu}\overline{H}$ и $\overline{D}$ — магнитная и электрическая индукции соответственно; j — мнимая единица; ε — абсолютная диэлектрическая проницаемость феррита; ω — циклическая частота монохроматического процесса; $\varepsilon' = \varepsilon - j\dfrac{\sigma}{\omega}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость феррита; σ — однородная удельная электрическая проводимость феррита; $\tilde{\mu}$ — тензор магнитной проницаемости феррита

$$\tilde{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & jk & jl \\ -jk & \mu_{22} & jm \\ -jl & -jm & \mu_{33} \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

где l, m, k, μ_{11}, μ_{22}, μ_{33} — компоненты тензора магнитной проницаемости феррита; $k = \mu_0 \dfrac{\omega Y \mu_0 M_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \dfrac{Гн}{м}$ — магнитная постоянная; $\omega_0 = Y\mu_0 H_0$ — круговая частота ферромагнитного резонанса; H_0 — напряжённость постоянного внешнего магнитного поля; $Y = 1{,}76 \cdot 10^{11} \frac{Кл}{кг}$ — гиромагнитное отношение; M_0 — намагниченность феррита.

В [9] были получены разложения операторов $rot\overline{H}$ и $rot\overline{E}$ из системы (1) по осям произвольной криволинейно-ортогональной системы координат, когда продольная ось волновода совпадает с осью Z, и имеют вид

$$\begin{cases} \nabla_2 H_z + j\gamma H_2 = j\omega\varepsilon' E_1, \\ -(\nabla_1 H_z + j\gamma H_1) = j\omega\varepsilon' E_2, \\ \delta_1 H_2 - \delta_2 H_1 = j\omega\varepsilon' E_z, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \nabla_2 E_z + j\gamma E_2 = -j\omega \overline{B}_1 = \\ = -j\omega(\mu_{11} H_1 + jkH_2 + jlH_z), \\ \nabla_1 E_z + j\gamma E_1 = j\omega \overline{B}_2 = \\ = j\omega(-jkH_1 + \mu_{22} H_2 + jmH_z), \\ \delta_1 E_2 - \delta_2 E_1 = -j\omega \overline{B}_z = \\ = -j\omega(-jlH_1 - jmH_2 + \mu_{33} H_z), \end{cases} \tag{4}$$

где (E_1, E_2) и (H_1, H_2) — поперечные компоненты электрического и магнитного полей, (E_z, H_z) — продольные компоненты электрического, магнитного полей; γ — постоянная распространения;

$\delta_1 = \frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_{21}^2\right)$; $\delta_2 = \frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \Gamma_{12}^1\right)$; $\nabla_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}$;

$\nabla_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}$; $\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x_2}$ и $\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial x_1}$ — символы Кристоффеля 2-го рода [10]; h_1, h_2 — коэффициенты Ламэ поперечных координатных осей [11]; x_1, x_2, x_3 — координатные линии ортогонально-криволинейных систем координат с продольно-регулярной осью $x_3 = z$.

Из (3) и (4) выразим поперечные компоненты электрического поля. Для этого из первого уравнения (3) находим

$$H_2 = \frac{1}{j\gamma}(j\omega\varepsilon' E_1 - \nabla_2 H_z). \tag{5}$$

Подставив (5) во второе уравнение (4) имеем

$$\nabla_1 E_z + j\gamma E_1 = j\omega(-jkH_1 + \mu_{22} H_2 + jmH_z) =$$
$$= \omega k H_1 + \frac{j\mu_{22}\omega}{\gamma}\omega\varepsilon' E_1 - \frac{\mu_{22}\omega\nabla_2 H_3}{\gamma} - \omega m H_z.$$

Откуда после соответствующих преобразований относительно E_1 получим

$$E_1 = -\frac{j\gamma}{b^2}\left[\nabla_1 E_z - \omega k H_1 + \left(\frac{\mu_{22}\omega}{\gamma}\nabla_2 + \omega m\right) H_z\right], \tag{6}$$

где

$$b^2 = \omega^2 \mu_{22}\varepsilon' - \gamma^2. \tag{7}$$

Из второго уравнения (3) выразим

$$H_1 = -\frac{1}{j\gamma}(j\omega\varepsilon' E_2 + \nabla_1 H_z). \tag{8}$$

Подставив (8) в первое уравнение (4) получим

$$\nabla_2 E_z + j\gamma E_2 = -j\omega(\mu_{11} H_1 + jkH_2 + jlH_z) =$$
$$= j\frac{\mu_{11}\omega^2\varepsilon' E_2}{\gamma} + \frac{\mu_{11}}{\gamma}\omega\nabla_1 H_z + \omega k H_2 + \omega l H_z.$$

Из последнего выражения после несложных преобразований относительно E_2, получим

$$E_2 = -\frac{j\gamma}{a^2}\left[\nabla_2 E_z - \omega k H_2 - \left(\frac{\mu_{11}\omega}{\gamma}\nabla_1 + \omega l\right) H_z\right], \tag{9}$$

где

$$a^2 = \omega^2 \mu_{11}\varepsilon' - \gamma^2. \tag{10}$$

Далее из правых частей (12) и (15), соответственно, исключим поперечные компоненты H_1 и H_2. Для этого подставляя (8) в (6) получим

$$E_1 = -\frac{j\gamma}{b^2}\left[\nabla_1 E_z - \omega k H_1 + \left(\frac{\mu_{22}\omega}{\gamma}\nabla_2 + \omega m\right) H_z\right] =$$
$$= -\frac{j\gamma}{b^2}\left[\nabla_1 E_z - \omega k\left(-\frac{1}{j\gamma}(j\omega\varepsilon' E_2 + \nabla_1 H_z)\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\mu_{22}\omega}{\gamma}\nabla_2 + \omega m\right) H_z\right] = -\frac{j\gamma\nabla_1 E_z}{b^2} - \frac{j\omega^2 k\varepsilon' E_2}{b^2} -$$
$$-\frac{\omega k\nabla_1 H_3}{b^2} - \frac{j\mu_{22}\omega\nabla_2 H_z}{b^2} - \frac{j\gamma\omega m H_z}{b^2}. \tag{11}$$

Подставив (5) в (9) получим

$$E_2 = -\frac{j\gamma}{a^2}\left[\nabla_2 E_z - \omega k H_2 - \left(\frac{\mu_{11}\omega}{\gamma}\nabla_1 + \omega l\right) H_z\right] =$$

$$=-\frac{j\gamma}{a^2}\left[\nabla_2 E_z-\omega k\left(\frac{1}{j\gamma}\left(j\omega\varepsilon' E_1-\nabla_2 H_z\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\mu_{11}\omega}{\gamma}\nabla_1+\omega l\right)H_z\right]=-\frac{j\gamma\nabla_2 E_z}{a^2}+\frac{j\omega^2 k\varepsilon' E_1}{a^2}-$$

$$-\frac{\omega k\nabla_2 H_z}{a^2}+\frac{j\mu_{11}\omega\nabla_1 H_z}{a^2}+\frac{j\gamma\omega l H_z}{a^2}. \qquad (12)$$

Из (11) и (12) следует, что подставляя одно уравнение в другое можно получить поперечные компоненты электрического поля E_1 и E_2, выраженные через продольные компоненты электрического и магнитного полей. Поэтому подставив в (11) выражение (12) получим

$$E_1=-\frac{j\gamma a^2}{a^2b^2-\omega^4\varepsilon'^2 k^2}\left\{\nabla_1 E_z+\left(\frac{\omega\mu_{22}}{\gamma}\frac{p^2}{a^2}\nabla_2+\omega m\right)H_z-\right.$$

$$\left.-\frac{j\omega^2\varepsilon' k}{a^2}\left[\nabla_2 E_z-\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\nabla_1+\omega l\right)H_z\right]\right\}, \qquad (13)$$

где

$$p^2=\omega^2\varepsilon'\frac{\mu_{11}\mu_{22}-k^2}{\mu_{22}}-\gamma^2. \qquad (14)$$

После подстановки в (12) формулы (11) будем иметь

$$E_2=-\frac{j\gamma b^2}{a^2b^2-\omega^4\varepsilon'^2 k^2}\left\{\nabla_2 E_z-\left(\frac{\omega\mu_{11}}{\gamma}\frac{g^2}{b^2}\nabla_1+\omega l\right)H_z+\right.$$

$$\left.+\frac{j\omega^2\varepsilon' k}{b^2}\left[\nabla_1 E_z+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon'}\nabla_2+\omega m\right)H_z\right]\right\}, \qquad (15)$$

где

$$g^2=\omega^2\varepsilon'\frac{\mu_{11}\mu_{22}-k^2}{\mu_{11}}-\gamma^2. \qquad (16)$$

Выражения (13) и (15) являются обобщёнными формулами поперечных компонент электрического поля, учитывающими тепловые потери, для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при *произвольном* намагничивании.

Для определения поперечных компонент магнитного поля преобразуем (8)

$$H_1=-\frac{1}{j\gamma}\left(j\omega\varepsilon' E_2+\nabla_1 H_z\right)=$$

$$=-\frac{j}{j}\frac{1}{j\gamma}\left(j\omega\varepsilon' E_2+\nabla_1 H_z\right)=$$

$$=-\frac{\omega\varepsilon' E_2}{\gamma}+\frac{j\nabla_1 H_z}{\gamma}. \qquad (17)$$

Далее подставляя в (17) формулу (15), получим

$$H_1=-\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}E_2+\frac{j\nabla_1 H_z}{\gamma}=-\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\times$$

$$\times\left\{-\frac{j\gamma b^2}{a^2b^2-\omega^4\varepsilon'^2 k^2}\left\{\nabla_2 E_z-\left(\frac{\omega\mu_{11}}{\gamma}\frac{g^2}{b^2}\nabla_1+\omega l\right)H_z+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{j\omega^2\varepsilon' k}{b^2}\left[\nabla_1 E_z+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon'}\nabla_2+\omega m\right)H_z\right]\right\}\right\}+\frac{j\nabla_1 H_z}{\gamma}=$$

$$=\frac{j\gamma b^2}{a^2b^2-\omega^4\varepsilon'^2 k^2}\left\{\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_2 E_z-\left(\frac{\omega^2\varepsilon'\mu_{11}}{\gamma^2}\frac{g^2}{b^2}\nabla_1+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\omega^2\varepsilon' l}{\gamma}\right)H_z+\frac{j\omega^2\varepsilon' k}{b^2}\left[\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_1 E_z+\right.$$

$$\left.\left.+\left(\nabla_2+\frac{\omega^2\varepsilon' m}{\gamma}\right)H_z\right]\right\}+\frac{j\nabla_1 H_z}{\gamma}.$$

В последнем выражении внесём в фигурную скобку $\frac{j\nabla_1 H_z}{\gamma}$ и тогда получим

$$H_1=\frac{j\gamma b^2}{a^2b^2-\omega^4\varepsilon'^2 k^2}\left\{\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_2 E_z-\left(\frac{\omega^2\mu_{11}}{\gamma^2}\frac{g^2}{b^2}\nabla_1+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\omega^2\varepsilon' l}{\gamma}\right)H_z+\frac{a^2b^2-\omega^4\varepsilon'^2 k^2}{\gamma^2 b^2}\nabla_1 H_z+$$

$$\left.+\frac{j\omega^2\varepsilon' k}{b^2}\left[\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_1 E_z+\left(\nabla_2+\frac{\omega^2\varepsilon' m}{\gamma}\right)H_z\right]\right\}.$$

После соответствующих преобразований этого выражения окончательно получим

$$H_1=\frac{j\gamma b^2}{a^2b^2-\omega^4\varepsilon'^2 k^2}\left\{\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_2 E_z-\left(\nabla_1+\frac{\omega^2\varepsilon' l}{\gamma}\right)H_z+\right.$$

$$\left.+\frac{j\omega^2 k\varepsilon'}{b^2}\left[\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_1 E_z+\left(\nabla_2+\frac{\omega^2\varepsilon' m}{\gamma}\right)H_z\right]\right\}. \qquad (18)$$

Для определения поперечной компоненты H_2, воспользуемся формулой (5), которую перепишем в виде

$$H_2=\frac{1}{j\gamma}\left(j\omega\varepsilon' E_1-\nabla_2 H_z\right)=\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}E_1+\frac{j\nabla_2 H_z}{\gamma}. \qquad (19)$$

После подстановки в (19) формулы (13) получим

$$H_2 = \frac{1}{j\gamma}\left(j\omega\varepsilon' E_1 - \nabla_2 H_z\right) = \frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}E_1 + \frac{j\nabla_2 H_z}{\gamma} =$$

$$= \frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\left\{-\frac{j\gamma a^2}{a^2b^2 - \omega^4\varepsilon'^2 k^2}\left\{\nabla_1 E_z + \left(\frac{\omega\mu_{22}}{\gamma}\frac{p^2}{a^2}\nabla_2 + \omega m\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times H_z - \frac{j\omega^2\varepsilon' k}{a^2}\left[\nabla_2 E_z - \left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon'}\nabla_1 + \omega l\right)H_z\right]\right\}\right\} +$$

$$+\frac{j\nabla_2 H_z}{\gamma}.$$

Тогда после внесения $\frac{j\nabla_2 H_z}{\gamma}$ в фигурную скобку получим

$$H_2 = -\frac{j\gamma a^2}{a^2b^2 - \omega^4\varepsilon'^2 k^2}\left\{\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_1 E_z + \right.$$

$$+\left(\frac{\omega^2\varepsilon'\mu_{22}}{\gamma^2}\frac{p^2}{a^2}\nabla_2 - \frac{a^2b^2 - \omega^4\varepsilon'^2 k^2}{\gamma^2 a^2}\nabla_2 + \frac{\omega^2\varepsilon' m}{\gamma}\right)\times$$

$$\left.\times H_z - \frac{j\omega^2\varepsilon' k}{a^2}\left[\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_2 E_z - \left(\nabla_1 + \frac{\omega^2\varepsilon' l}{\gamma}\right)H_z\right]\right\}.$$

После компоновки и группировки последней формулы будем иметь

$$H_2 = -\frac{j\gamma a^2}{a^2b^2 - \omega^4\varepsilon'^2 k^2}\left\{\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_1 E_z + \right.$$

$$+\left(\nabla_2 + \frac{\omega^2\varepsilon' m}{\gamma}\right)H_z - \frac{j\omega^2 k\varepsilon'}{a^2}\times$$

$$\left.\times\left[\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_2 E_z - \left(\nabla_1 + \frac{\omega^2\varepsilon' l}{\gamma}\right)H_z\right]\right\}. \qquad (20)$$

Выражения (18) и (20) представляют обобщённые формулы поперечных компонент магнитного поля для гиротропных волноводов, учитывающие тепловые потери, с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения, с регулярной продольной осью, совпадающей с осью Z декартовой системы координат, при *произвольном* намагничивании.

2. Общие и частные формулы поперечных компонент электромагнитного поля гиротропных волноводов с тепловой потерей

В ортогонально-криволинейной системе координат при *продольном* намагничивании направление внешнего магнитного поля совпадает с осью Z и элементы тензор магнитной проницаемости феррита (2) выражаются следующим образом [12]

$$\mu_{33} = \mu_{\parallel},\ \ \mu_{11} = \mu_{22} = \mu,\ \ l = m = 0,\ \ k \neq 0,$$

$$\mu_{\parallel} \approx \mu_0,\ \ \mu = \mu_0 + \mu_0\frac{Y\mu_0 M_0\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (21)$$

Тогда формулы (7), (10), (14) и (16) с учётом (21) примут вид

$$a^2 = b^2 = \omega^2\mu\varepsilon' - \gamma^2;$$

$$g^2 = p^2 = \omega^2\mu_{\perp}\varepsilon' - \gamma^2 = c^2, \qquad (22)$$

где $\mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - k^2}{\mu}$.

Подставив (21) и (22) в обобщённые формулы поперечных компонент электрического поля (13), (15) и в обобщённые формулы поперечных компонент магнитного поля (18), (20) получим общие формулы поперечных компонент электромагнитного поля для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при *продольном* намагничивании

$$\begin{cases} E_1 = -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2}\left\{\nabla_1 E_z + \frac{\omega\mu}{\gamma}\frac{c^2}{a^2}\nabla_2 H_z - \frac{j\omega^2\varepsilon' k}{a^2}\times\right. \\ \left.\times\left[\nabla_2 E_z - \frac{\gamma}{\omega\varepsilon'}\nabla_1 H_z\right]\right\} = -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2}\left\{\nabla_1 E_z + \right. \\ \left.+\frac{\omega\mu}{\gamma}\bar{\bar{\nabla}}_2^m H_z - \frac{j\omega^2\varepsilon' k}{a^2}\left[\nabla_2 E_z - \frac{\gamma}{\omega\varepsilon'}\nabla_1 H_z\right]\right\}, \\ E_2 = -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2}\left\{\nabla_2 E_z - \frac{\omega\mu}{\gamma}\frac{c^2}{a^2}\nabla_1 H_z + \frac{j\omega^2\varepsilon' k}{a^2}\times\right. \\ \left.\times\left[\nabla_1 E_z + \frac{\gamma}{\omega\varepsilon'}\nabla_2 H_z\right]\right\} = -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2}\left\{\nabla_2 E_z - \right. \\ \left.-\frac{\omega\mu}{\gamma}\bar{\bar{\nabla}}_1^l H_z + \frac{j\omega^2\varepsilon' k}{a^2}\left[\nabla_1 E_z + \frac{\gamma}{\omega\varepsilon'}\nabla_2 H_z\right]\right\}, \qquad (23) \\ H_1 = \frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2}\left\{\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_2 E_z - \nabla_1 H_z + \frac{j\omega^2 k\varepsilon'}{a^2}\times\right. \\ \left.\times\left[\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_1 E_z + \nabla_2 H_z\right]\right\}, \\ H_2 = -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2}\left\{\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_1 E_z + \nabla_2 H_z - \frac{j\omega^2 k\varepsilon'}{a^2}\times\right. \\ \left.\times\left[\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_2 E_z - \nabla_1 H_z\right]\right\}, \end{cases}$$

где

$$a^2b^2-\omega^4\varepsilon'^2k^2=\left(\omega^2\varepsilon'\mu+\omega^2\varepsilon'k-\gamma^2\right)\times$$
$$\times\left(\omega^2\varepsilon'\mu-\omega^2\varepsilon'k-\gamma^2\right)=g_+^2g_-^2,$$
$$g_+^2=\left(\omega^2\varepsilon'\mu+\omega^2\varepsilon'k-\gamma^2\right),g_-^2=\left(\omega^2\varepsilon'\mu-\omega^2\varepsilon'k-\gamma^2\right),$$
$$\bar{\nabla}_1^l=\frac{g^2}{b^2}\nabla_1+\frac{l}{\mu_{11}}\gamma=\frac{c^2}{a^2}\nabla_1,\ \bar{\nabla}_2^m=\frac{p^2}{a^2}\nabla_2+\frac{m}{\mu_{22}}\gamma=\frac{c^2}{a^2}\nabla_2.$$

Коэффициенты Ламэ [11] и символы Кристоффеля [10] в эллиптической системе координат $\left(x_1=\xi,\ x_2=\phi,\ x_3=z\right)$ имеют вид

$$\begin{cases}h_1=h_2=ed,\ \ h_3=1,\\ \Gamma_{12}^1=\dfrac{\sin 2\xi}{2d^2},\ \ \Gamma_{21}^2=\dfrac{sh2\xi}{2d^2},\end{cases}\tag{24}$$

где e — фокусное расстояние эллипса; $d^2=ch^2\xi-\cos^2\phi$.

Для определения частных формул поперечных компонент электромагнитного поля гиротропного эллиптического волновода при *продольном* намагничивании, выраженные через продольные компоненты электрического и магнитного полей, подставим коэффициенты Ламэ из (24) в общую формулу (23), тогда получим

$$\begin{cases}E_\xi=-\dfrac{j\gamma a^2}{g_+^2g_-^2}\dfrac{1}{ed}\left[\dfrac{\partial E_z}{\partial\xi}+\dfrac{\omega\mu}{\gamma}\dfrac{c^2}{a^2}\dfrac{\partial H_z}{\partial\phi}-\dfrac{j\omega^2\varepsilon'k}{a^2}\times\right.\\ \left.\times\left(\dfrac{\partial E_z}{\partial\phi}-\dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon'}\dfrac{\partial H_z}{\partial\xi}\right)\right],\\ E_\phi=-\dfrac{j\gamma a^2}{g_+^2g_-^2}\dfrac{1}{ed}\left[\dfrac{\partial E_z}{\partial\phi}-\dfrac{\omega\mu}{\gamma}\dfrac{c^2}{a^2}\dfrac{\partial H_z}{\partial\xi}+\dfrac{j\omega^2\varepsilon'k}{a^2}\times\right.\\ \left.\times\left(\dfrac{\partial E_z}{\partial\xi}+\dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon'}\dfrac{\partial H_z}{\partial\phi}\right)\right],\\ H_\xi=\dfrac{j\gamma a^2}{g_+^2g_-^2}\dfrac{1}{ed}\left[\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\dfrac{\partial E_z}{\partial\phi}-\dfrac{\partial H_z}{\partial\xi}+\dfrac{j\omega^2\varepsilon'k}{a^2}\times\right.\\ \left.\times\left(\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\dfrac{\partial E_z}{\partial\xi}+\dfrac{\partial H_z}{\partial\phi}\right)\right],\\ H_\phi=-\dfrac{j\gamma a^2}{g_+^2g_-^2}\dfrac{1}{ed}\left[\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\dfrac{\partial E_z}{\partial\xi}+\dfrac{\partial H_z}{\partial\phi}-\dfrac{j\omega^2\varepsilon'k}{a^2}\times\right.\\ \left.\times\left(\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\dfrac{\partial E_z}{\partial\phi}-\dfrac{\partial H_z}{\partial\xi}\right)\right].\end{cases}\tag{25}$$

При *нормальном* намагничивании направление внешнего магнитного поля совпадает с координатной осью φ ортогонально-криволинейной системы координат и элементы тензор магнитной проницаемости феррита (2) имеют вид [12]

$$\mu_{11}=\mu_{\parallel};\ \mu_{22}=\mu_{33}=\mu;\ k=l=0;\ m\neq 0.\tag{26}$$

Поэтому при *нормальном* намагничивании формулы (7), (10), (14) и (16) принимают вид

$$\begin{cases}a^2=\omega^2\mu_{\parallel}\varepsilon'-\gamma^2,\ \ b^2=\omega^2\mu\varepsilon'-\gamma^2,\\ g^2=\omega^2\varepsilon'\mu-\gamma^2,\ \ p^2=\omega^2\varepsilon'\mu_{\parallel}-\gamma^2.\end{cases}$$

Откуда следует, что

$$a^2=p^2=\omega^2\varepsilon'\mu_{\parallel}-\gamma^2,\ \ b^2=g^2=\omega^2\varepsilon'\mu-\gamma^2.\tag{27}$$

Подставив (26) и (27) в обобщённые формулы поперечных компонент электрического поля (13), (15) и в обобщённые формулы поперечных компонент магнитного поля (18), (20) получим общие формулы поперечных компонент электромагнитного поля для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при *нормальном* намагничивании

$$\begin{cases}E_1=-\dfrac{j\gamma}{b^2}\left\{\nabla_1E_z+\dfrac{\omega\mu}{\gamma}\left(\nabla_2+\dfrac{m}{\mu}\gamma\right)H_z\right\}=\\ =-\dfrac{j\gamma}{b^2}\left\{\nabla_1E_z+\dfrac{\omega\mu}{\gamma}\bar{\nabla}_2^mH_z\right\},\\ E_2=-\dfrac{j\gamma}{a^2}\left\{\nabla_2E_z-\dfrac{\omega\mu_{\parallel}}{\gamma}\nabla_1H_z\right\},\\ H_1=\dfrac{j\gamma}{a^2}\left\{\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_2E_z-\nabla_1H_z\right\},\\ H_2=-\dfrac{j\gamma}{b^2}\left\{\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_1E_z+\left(\nabla_2+\dfrac{\omega^2\varepsilon'm}{\gamma}\right)H_z\right\}=\\ =-\dfrac{j\gamma}{b^2}\left\{\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_1E_z+\nabla_2^mH_z\right\},\end{cases}\tag{28}$$

где дифференциальные операторы 1-го порядка с учетом намагниченности при *нормальном* намагничивании имеют вид

$$\bar{\nabla}_2^m=\nabla_2+\frac{m}{\mu}\gamma,\ \ \nabla_2^m=\nabla_2+\frac{\omega^2\varepsilon'm}{\gamma}.$$

Для определения поперечных компонент электромагнитного поля гиротропного эллиптического волновода при *нормальном* намагничивании, подставим коэффициенты Ламэ в эллиптической системе координат из (24) в (28). Тогда получим

$$\begin{cases} E_\xi = -\dfrac{j\gamma}{b^2}\dfrac{1}{ed}\left[\dfrac{\partial E_z}{\partial \xi} + \dfrac{\omega\mu}{\gamma}\left(\dfrac{\partial}{\partial \phi} + ed\dfrac{m}{\mu}\gamma\right)H_z\right], \\ E_\phi = -\dfrac{j\gamma}{a^2}\dfrac{1}{ed}\left[\dfrac{\partial E_z}{\partial \phi} - \dfrac{\omega\mu_\parallel}{\gamma}\dfrac{\partial H_z}{\partial \xi}\right], \\ H_\xi = \dfrac{j\gamma}{a^2}\dfrac{1}{ed}\left[\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\dfrac{\partial E_z}{\partial \phi} - \dfrac{\partial H_z}{\partial \xi}\right], \\ H_\phi = -\dfrac{j\gamma}{b^2}\dfrac{1}{ed}\left[\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\dfrac{\partial E_z}{\partial \xi} + \left(\dfrac{\partial}{\partial \phi} + \dfrac{\omega^2\varepsilon' m}{\gamma}ed\right)H_z\right]. \end{cases} \qquad (29)$$

При *касательном* намагничивании направление внешнего магнитного поля совпадает с координатной осью ξ ортогонально-криволинейной системы координат и тензор магнитной проницаемости феррита (2) описывается формулой [12]

$$\begin{aligned} &\mu_{22} = \mu_\parallel, \\ &\mu_{11} = \mu_{33} = \mu, \quad . \\ &k = m = 0, \;\; l \neq 0 \end{aligned} \qquad (30)$$

Поэтому при *касательном* намагничивании формулы (7), (10), (14) и (16) принимают вид

$$\begin{cases} a^2 = \omega^2\mu_{11}\varepsilon' - \gamma^2 = \omega^2\mu\varepsilon' - \gamma^2; \\ b^2 = \omega^2\mu_{22}\varepsilon' - \gamma^2 = \omega^2\mu_\parallel\varepsilon' - \gamma^2; \\ g^2 = \omega^2\varepsilon'\dfrac{\mu_{11}\mu_{22} - k^2}{\mu_{11}} - \gamma^2 = \omega^2\varepsilon'\mu_\parallel - \gamma^2; \\ p^2 = \omega^2\varepsilon'\dfrac{\mu_{11}\mu_{22} - k^2}{\mu_{22}} - \gamma^2 = \omega^2\varepsilon'\mu - \gamma^2. \end{cases}$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} a^2 = p^2 = \omega^2\mu\varepsilon' - \gamma^2; \\ b^2 = g^2 = \omega^2\mu_\parallel\varepsilon' - \gamma^2. \end{aligned} \qquad (31)$$

Подставив (30) и (31) в обобщённые формулы поперечных компонент электромагнитного поля (13), (15), (18) и (20) при произвольном намагничивании получим общие формулы этих же компонент электромагнитного поля для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при *касательном* намагничивании

$$\begin{cases} E_1 = -\dfrac{j\gamma}{b^2}\left\{\nabla_1 E_z + \dfrac{\omega\mu_\parallel}{\gamma}\nabla_2 H_z\right\}, \\ E_2 = -\dfrac{j\gamma}{a^2}\left\{\nabla_2 E_z - \left(\dfrac{\omega\mu}{\gamma}\nabla_1 + \omega l\right)H_z\right\} = \\ = -\dfrac{j\gamma}{a^2}\left\{\nabla_2 E_z - \dfrac{\omega\mu}{\gamma}\overline{\nabla}_1^l H_z\right\}, \\ H_1 = \dfrac{j\gamma}{a^2}\left\{\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_2 E_z - \left(\nabla_1 + \dfrac{\omega^2\varepsilon' l}{\gamma}\right)H_z\right\} = \\ = \dfrac{j\gamma}{a^2}\left\{\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_2 E_z - \overline{\nabla}_1^l H_z\right\}, \\ H_2 = -\dfrac{j\gamma}{b^2}\left\{\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_1 E_z + \nabla_2 H_z\right\}, \end{cases} \qquad (32)$$

где дифференциальные операторы 1-го порядка с учётом намагниченности при *касательном* намагничивании имеют вид

$$\begin{cases} \overline{\nabla}_1^l = \nabla_1 + \dfrac{l}{\mu}\gamma; \\ \nabla_1^l = \nabla_1 + \dfrac{\omega^2\varepsilon' l}{\gamma}; \\ \overline{\nabla}_2^m = \nabla_2; \\ \nabla_2^m = \nabla_2. \end{cases}$$

Для определения поперечных компонент электромагнитного поля гиротропного эллиптического волновода при *касательном* намагничивании подставим коэффициенты Ламэ в эллиптической системе координат из (24) в (32). Тогда получим

$$\begin{cases} E_\xi = -\dfrac{j\gamma}{b^2}\dfrac{1}{ed}\left[\dfrac{\partial E_z}{\partial \xi} + \dfrac{\omega\mu_\parallel}{\gamma}\dfrac{\partial H_z}{\partial \phi}{}_z\right], \\ E_\phi = -\dfrac{j\gamma}{a^2}\dfrac{1}{ed}\left[\dfrac{\partial E_z}{\partial \phi} - \dfrac{\omega\mu}{\gamma}\left(\dfrac{\partial}{\partial \xi} + ed\dfrac{l}{\mu}\gamma\right)H_z\right], \\ H_\xi = \dfrac{j\gamma}{a^2}\dfrac{1}{ed}\left[\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\dfrac{\partial E_z}{\partial \phi} - \left(\dfrac{\partial}{\partial \xi} + \dfrac{\omega^2\varepsilon' l}{\gamma}ed\right)H_z\right], \\ H_\phi = -\dfrac{j\gamma}{b^2}\dfrac{1}{ed}\left[\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\dfrac{\partial E_z}{\partial \xi} + \dfrac{\partial H_z}{\partial \phi}\right], \end{cases} \qquad (33)$$

где

$$\begin{aligned} a^2 = p^2 = \omega^2\mu\varepsilon' - \gamma^2; \\ b^2 = g^2 = \omega^2\mu_\parallel\varepsilon' - \gamma^2. \end{aligned}$$

Заключение

В статье представлен подробный вывод различных формул поперечных компонент электромагнитного поля для гиротропных волноводов, учитывающих тепловые потери, именно:

1. Обобщённых формул поперечных компонент электрического (13), (15) и магнитного (18), (20) полей, учитывающие тепловые потери, для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечных сечений при произвольном намагничивании;
2. Общих формул поперечных компонент электромагнитного поля, учитывающие тепловые потери, для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечных сечений при продольном (23), нормальном (28) и касательном (32) намагничиваниях;
3. Частных формул поперечных компонент электромагнитного поля, учитывающие тепловые потери, для гиротропного эллиптического волновода при продольном (25), нормальном (29) и касательном (33) намагничиваниях.

Полученные частные формулы поперечных компонент электромагнитного поля, учитывающие тепловые потери, для гиротропного эллиптического волновода при нормальном, касательном и продольном намагничиваниях необходимы, для определения граничных условий для соответствующих краевых задач частных уравнений Гельмгольца, а также при исследованиях структуры электромагнитного поля основных мод.

Литература

1. *Бушкин С.С., Головин С.А., Сорока Н.Н.* Особенности разработки малогабаритных ФАР на ферритовых фазовращателях для беспилотных летательных аппаратов // Вестник концерна ВКО «Алмаз–Антей». 2020. № 1. С. 19–25.
2. *Гуськов А.Б., Михайлов Н.В., Страшинова А.Е., Чалых Д.В., Черникин Д.В.* Быстродействующие ферритовые фазовращатели типа Реджиа-Спенсера для современных ФАР // Антенны. 2021. №5. С. 27–36.
3. *Добисов В.И., Растворова Н.В., Рудакова А.М., Терехова О.М.* Нелинейные потери в циркуляторах // Антенны. 2021. №5. С. 73–78.
4. *Сковородников С., Семенов Д.* Особенности реализации технологии flip-chip при производстве СВЧ-приборов на примере ферритового SMD-циркулятора // Электроника. 2022. №7. С. 130–132.
5. *Артемов М.Л., Афанасьев О.В., Сличенко М.П.* Направление совершенствования характеристик перспективных антенных систем // Радиотехника. 2023. Т. 86. № 5. С. 184–198.
6. *Макаров П.А., Уляшева М.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Диссипативный характер дисперсии гиромагнитной волны в пластине феррита // Материалы XXVII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы (фундаментальные физические исследования)». 2019. С. 209–219.
7. *Itigilov G.B., Shirapov D.Sh., Kravchenko V.A.* Features of electromagnetic wave propagation in a longitudinally magnetized gyrotropic elliptic waveguide // Journal of Physics: Conference Series, 2020. Vol. 1632. No. 012003.
8. *Устинов А., Кочемасов В., Хасьянова Е.* Ферритовые материалы для устройств СВЧ-электроники. Основные критерии выбора // СВЧ-электроника. 2015. № 8. С. 86–92.
9. *Итигилов Г.Б., Ширапов Д.Ш., Кравченко В.А.* Обобщённые, общие и частные уравнения Гельмгольца гиротропных волноводов с учетом тепловых потерь // Радиотехника. 2023. Т. 87. №12. С.137–148.
10. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. 1984. 832 с.
11. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука. 1967. 780 с.
12. *Итигилов Г.Б., Ширапов Д.Ш.* Математическое моделирование распространения электромагнитных волн в гиротропных волноводах. Улан-Удэ: Издательство Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления. 2022. 154 с.

Поступила 8 августа 2024 г.

English

GENERALIZED, GENERAL AND PARTICULAR FORMULAS OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD TRANSVERSE COMPONENTS FOR GYROTROPIC WAVEGUIDES WITH CONSIDERATION TO HEAT LOSS

Garma Borisovich Itigilov — PhD, Associate Professor, East Siberian State University of Technology and Management.
E-mail: gablz@mail.ru

Dashadondok Shagdarovich Shirapov — Grand Dr. in Physics and Mathematics, Professor, East Siberian State University of Technology and Management.
E-mail: shir48@mail.ru

Vyacheslav Alexandrovich Kravchenko — PhD, Associate Professor, Head of the Department, East Siberian State University of Technology and Management.
E-mail: krawyach@mail.ru

Address: 670013, Republic of Buryatia, Ulan-Ude, Klyuchevskaya str., 40B, building 1.

Abstract: There was no study of main parameters of gyrotropic elliptic waveguides with thermal loss and characteristics of hybrid electromagnetic waves propagating in them, as well as the structure of the electromagnetic field of the main modes dependent on both the ellipticity and the waveguide magnetization intensity. Respective boundary value problems for Helmholtz specific equations must be solved to investigate these and other issues related to gyrotropic elliptic waveguides magnetized longitudinally, normally and tangentially in view of heat loss. Yet, the known transverse components of the electromagnetic field are required for the appropriate magnetization to state and solve these boundary value problems. The paper is aimed at developing mathematical apparatus for accounting heat loss and estimating the transverse components of the electromagnetic field in gyrotropic waveguides with orthogonally curved cross-section shapes for cases of arbitrary, normal, tangential, and longitudinal magnetization. The paper retrieved generalized and general formulas of the electromagnetic field transverse components with consideration to heat loss for gyrotropic waveguides with orthogonally curved cross-section shapes with arbitrary and specific (normal, tangential and longitudinal) magnetization accordingly. Sub-expressions of the electromagnetic field transverse components are obtained from the general relations for gyrotropic elliptic waveguides that are normally, tangentially and longitudinally magnetized in view of heat loss. The obtained sub-relations of the electromagnetic field transverse components with consideration to heat loss enable to state and solve boundary value problems for Helmholtz specific equations of hybrid HE- and EH-electromagnetic waves for normally, tangentially and longitudinally magnetized gyrotropic elliptic waveguides.

Keywords: the electromagnetic field components, gyrotropic elliptic waveguide, magnetization, cross-section shape, heat loss, boundary value problem.

References

1. *Bushkin S.S., Golovin S.A., Soroka N.N.* Features of the development of small-sized phased array antennas based on ferrite phase shifters for unmanned aerial vehicles. Bulletin of “Almaz–Antey”. 2020. No. 1. Pp. 19–25.
2. *Guskov A.B., Mikhailov N.V., Strashinova A.E., Chalykh D.V., Chernikin D.V.* High-speed ferrite Regia-Spencer type phase shifters for modern phased array antennas. Antennas. 2021. No. 5. Pp. 27–36.
3. *Dobisov V.I., Rastvorova N.V., Rudakova A.M., Terekhova O.M.* Nonlinear losses in circulators. Antennas. 2021. No. 5. Pp. 73–78.
4. *Skovorodnikov S., Semenov D.* Features of the implementation of flip-chip technology in the production of ultrahigh frequency devices using the example of a ferrite SMD circulator. Elektronika. 2022. No. 7. Pp. 130–132.
5. *Artyomov M.L., Afanasyev O.V., Slichenko M.P.* The direction of improving the characteristics of promising antenna systems. Radiotehnika. 2023. Vol. 86. No. 5. Pp. 184-198.
6. *Makarov P.A., Ulyasheva M.A., Shavrov V.G., Shcheglov V.I.* Dissipative character of gyromagnetic wave dispersion in a ferrite plate. Proceedings of the XXVII International Conference "Electromagnetic field and materials". 2019. Pp. 209–219.
7. *Itigilov G.B., Shirapov D.Sh., Kravchenko V.A.* Features of electromagnetic wave propagation in a longitudinally magnetized gyrotropic elliptic waveguide. Journal of Physics: Conference Series, 2020. Vol. 1632. No. 012003.
8. *Ustinov A., Kochemasov V., Khasyanova E.* Ferrite materials for microwave electronics devices. The main selection criteria. SVCh-elektronika. 2015. No. 8. Pp. 86–92.
9. *Itigilov G.B., Shirapov D.Sh., Kravchenko V.A.* Generalized, general and partial Helmholtz equations of gyrotropic waveguides taking into account thermal losses. Radio Engineering. 2023. Vol. 87. No. 12. Pp.137–148.
10. *Korn G., Korn T.* Handbook of mathematics for scientists and engineers. Moscow: Nauka. 1984. 832 p.
11. *Ango A.* Mathematics for electrical and radio engineers. Moscow: Nauka. 1967. 780 p.
12. *Itigilov G.B., Shirapov D.Sh.* Mathematical modeling of electromagnetic wave propagation in gyrotropic waveguides. Ulan-Ude: Publishing House of the East Siberian State University of Technology and Management. 2022. 154 p.