

# Телевизионные системы, передача и обработка изображений

DOI 10.24412/2221-2574-2024-1-51-60

УДК 621.396

## ОПТИМАЛЬНАЯ КОМПЛЕКСНАЯ ДИСКРЕТНАЯ ОБРАБОТКА ОТСЧЁТОВ НЕПРЕРЫВНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ПРИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ МАРКОВСКИХ ШУМАХ НАБЛЮДЕНИЙ

**Детков Александр Николаевич**

доктор технических наук, профессор, заместитель начальника подразделения  
ФАУ «Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем».

E-mail: [detkov@gosniias.ru](mailto:detkov@gosniias.ru)

Адрес: 125167, Российская Федерация, г. Москва, ул. Викторенко, д. 7.

*Аннотация:* На основе статистически эквивалентного дискретного представления непрерывных моделей векторов состояния и наблюдения решена задача оптимальной комплексной дискретной обработки отсчётов непрерывного векторного марковского случайного процесса с учётом известных статистических характеристик аддитивных марковских коррелированных шумов измерителей, имеющих разную физическую природу. При синтезе алгоритма использован метод разностных измерений. На простом примере показана эффективность комплексной обработки информации по данным двух измерителей на фоне гауссовских марковских шумов измерений.

*Ключевые слова:* непрерывный случайный процесс, оптимальная дискретная фильтрация, коррелированный шум, метод разностных измерений, рекуррентный многоканальный цифровой фильтр.

### Введение

Для повышения эффективности сложных радиоэлектронных систем, таких как РТС и ТКС, за счёт использования информационной избыточности обрабатываемых сигналов широко применяется комплексирование измерителей, основанное как на различных эмпирических способах (компенсации, фильтрации, введения дополнительной информации в цепь обратной связи и т. д.) [1], так и на методах оптимальной обработки информации, среди которых в первую очередь следует выделить методы, разработанные на основе теории условных марковских процессов, разработанной Р.Л. Стратоновичем [2]. Применение методов теории условных марковских процессов, для оптимального комплексирования измерителей впервые рассмотрено в [3, 4] в предположении, что все наблюдения осуществляются на фоне белых гауссовских шумов (БГШ). Более общие оптимальные и квазиоптимальные алгоритмы аналоговой комплексной обработки сигналов в случае, когда часть наблюдений проводится на

фоне окрашенных шумов, получены в [5].

В современных РТС и ТКС алгоритмы комплексной оптимальной обработки случайных процессов практически реализуются с помощью средств цифровой обработки сигналов [6, 7]. Поэтому указанные алгоритмы необходимо синтезировать в дискретной форме в виде рекуррентных соотношений, удобных для такой реализации, как например, в [8]. В то же время в большинстве случаев математические модели оцениваемых и наблюдаемых в РТС и ТКС процессов имеют непрерывную форму записи, что обусловлено физической сущностью происходящих со случайными процессами явлений.

В то же время современная элементная база позволяет использовать в электронных измерительных устройствах РТС и ТКС высокую частоту дискретизации, что приводит к автокорреляции измерительных отсчётов [6]. Поэтому при статистическом синтезе многоканальных цифровых фильтров (МкЦФ) необходимо учитывать коррелированность шумов

измерений, которые существенно влияют на формируемые оценки фильтрации [7–9].

В связи с этим возникает проблема синтеза оптимальных алгоритмов дискретной комплексной обработки отсчётов непрерывных случайных процессов при марковских коррелированных шумах измерителей, имеющих разную физическую природу и разную степень автокорреляции измерительных отсчётов [9].

В случае окрашенных шумов измерений традиционный подход к разработке алгоритмов комплексирования заключается в преобразовании уравнений состояния и измерения к требуемой канонической форме либо методом расширения пространства состояний, либо «декорреляцией» случайного процесса за счёт разностных измерений [9, 10]. Наиболее просто задача решается методом расширения пространства состояний, который используется, например, при статистическом синтезе цифровых фильтров [7]. Однако из-за необходимости фильтрации коррелированного шума наряду с информационным сообщением требуются дополнительные вычислительные затраты, вызванные увеличением размерности  $(n + M \cdot m)$ -мерного расширенного вектора состояния, что особенно критично для задач многоканального комплексирования и многопозиционных РТС и ТКС [11]. Метод разностных измерений не требует увеличения размерности вектора состояния, однако для моделей вектора состояния и измерения в дискретном времени оценка вектора формируется с запаздыванием на один шаг [10]. И, тем не менее, при использовании в электронных измерительных устройствах РТС и ТКС высокой частоты дискретизации этот метод представляет наибольший практический интерес и используется далее в работе при синтезе алгоритма оптимальной комплексной дискретной обработки отсчётов непрерывного случайного процесса.

### 1. Статистически эквивалентное дискретное представление уравнений состояния и наблюдения, заданных в непрерывном времени

При синтезе оптимальных алгоритмов дискретной комплексной обработки непрерывных случайных процессов центральным является вопрос об эквивалентном дискретном представлении уравнений состояния и наблюдения, заданных в непрерывном времени и описываемых векторным стохастическим дифференциальным уравнением (уравнение состояния) или алгебраическим равенством (уравнение наблюдения), определяющим зависимость наблюдаемых процессов от компонент вектора состояния и помех. Начиная с ранних работ по оптимальному оцениванию, при формулировке эквивалентной задачи с дискретным временем традиционно используют подход, при котором дискретные модели записываются непосредственно для этих уравнений (см., например, [8]). Такие модели обычно применяются для вывода аналоговых алгоритмов оптимального линейного оценивания гауссовских процессов с помощью предельного перехода от алгоритмов, полученных для дискретных процессов при уменьшении интервала дискретизации [9, 10]. Этот подход позволяет получить правильные алгоритмы оптимального оценивания в непрерывном времени, однако он не применим для синтеза оптимальных алгоритмов дискретной обработки непрерывных случайных процессов. Указанный факт связан, прежде всего, с тем, что мгновенные отсчёты наблюдения при наличии БГШ не имеют смысла, поскольку отсчёты этих шумов имеют бесконечную дисперсию [12].

Корректное эквивалентное дискретное представление аналоговой задачи оценивания получено в [12] методами теории условных марковских процессов, разработанной Р.Л. Стратоновичем [2]. В рамках этой теории на основании уравнений состояния и наблюдения строится совместный марковский процесс, часть компонент которого является наблюдаемой. Для совместного процесса обычными ме-

годами [12, 13] записывается (точно или приближённо) дискретный аналог, для которого и решается соответствующая задача оценивания. При этом существенным является не вывод дискретных алгоритмов фильтрации, а описание указанной процедуры сведения непрерывной задачи оценивания к дискретной. Влияние ширины полосы спектральной плотности окрашенного шума измерений на точность фильтрации отсчётов непрерывного гауссовского марковского случайного процесса приведено в [9].

Предположим, что на вход  $M$ -канального измерителя в интервале  $(t, t_0)$  поступает совокупность в общем случае векторных измерений, объединённых в вектор измерений

$$\mathbf{Y}(t) = [\mathbf{y}_1^T(t), \mathbf{y}_2^T(t), \dots, \mathbf{y}_m^T(t), \dots, \mathbf{y}_M^T(t)]^T, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(t) &= \mathbf{H}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{w}_1(t), \\ \mathbf{y}_2(t) &= \mathbf{H}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{w}_2(t), \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{y}_m(t) &= \mathbf{H}_m \mathbf{x}(t) + \mathbf{w}_m(t), \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{y}_M(t) &= \mathbf{H}_M \mathbf{x}(t) + \mathbf{w}_M(t). \end{aligned}$$

В (1)  $\mathbf{y}_m$  —  $n_{ym}$ -мерный вектор наблюдений  $m$ -го измерительного канала;  $m = \overline{1, M}$ ;  $\mathbf{x}(t)$  — оцениваемый непрерывный  $n_x$ -мерный случайный процесс, который описывается стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ)

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}_x \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}_x \xi_x(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2)$$

$\mathbf{w}_m$  —  $n_{ym}$ -мерные векторы коррелированного марковского шума, отождествляемого с векторами состояния дополнительной линейной системы:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{w}_m(t)}{dt} &= \mathbf{A}_{w_m} \mathbf{w}_m(t) + \mathbf{G}_{w_m} \xi_{w_m}(t), \\ \mathbf{w}_m(t_0) &= \mathbf{w}_{m0}, \quad m = \overline{1, M}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mathbf{H}_m$ ,  $\mathbf{A}_x$ ,  $\mathbf{G}_x$ ,  $\mathbf{A}_{w_m}$ ,  $\mathbf{G}_{w_m}$  — матрицы известных коэффициентов размером  $(n_{ym} \times n_x)$ ,  $(n_x \times n_x)$ ,  $(n_{ym} \times n_{ym})$  соответственно;  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{w}_{m0}$  — гауссовские векторы;  $\xi_x$ ,  $\xi_{w_m}$  — векторы БГШ размерами  $(n_x \times 1)$  и  $(n_{ym} \times 1)$  соответственно с независимыми значениями и известными статистическими характеристиками  $\mathbf{M}\{\xi_x\} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{M}\{\xi_{w_m}\} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{M}\{\xi_x(t) \xi_x^T(t+\tau)\} = \mathbf{I} \delta(\tau)$ ,  $\mathbf{M}\{\xi_{w_m}(t) \xi_{w_m}^T(t+\tau)\} = \mathbf{I} \delta(\tau)$ ,  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{I}$  — нулевая и единичная матрицы соответствующих размерностей;  $\mathbf{M}\{\cdot\}$  — операция усреднения по множеству реализаций;  $T$  — знак транспонирования;  $\delta(\tau)$  —  $\delta$ -функция Дирака.

В соответствии с методом разностных измерений в непрерывном времени эквивалентные уравнения измерений имеют канонический вид [10]

$$\mathbf{y}_{mz}(t) = \frac{d\mathbf{y}_m(t)}{dt} - \mathbf{A}_{w_m} \mathbf{y}_m(t) = \mathbf{F}_m \mathbf{x}(t) + \xi_{mz}(t), \quad m = \overline{1, M}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{F}_m = \mathbf{H}_m \mathbf{A}_x - \mathbf{A}_{w_m} \mathbf{H}_m$ ,  $\xi_{mz}(t) = \mathbf{H}_m \mathbf{G}_x \xi_x(t) + \mathbf{G}_{w_m} \xi_{w_m}(t)$  — векторы БГШ со статистическими характеристиками

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{\xi_{mz}\} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}\{\xi_{mz}(t) \xi_{mz}^T(t+\tau)\} &= (\mathbf{H}_m \mathbf{G}_x \mathbf{G}_x^T \mathbf{H}_m^T + \mathbf{G}_{w_m} \mathbf{G}_{w_m}^T) \delta(\tau). \end{aligned}$$

Из (4) видно, что эквивалентное измерение вектора случайного процесса  $\mathbf{x}(t)$  происходит на фоне векторов БГШ  $\xi_{mz}$  за счёт компенсации корреляционных связей процессов  $\mathbf{w}_m(t)$  характеризуемых матрицами  $\mathbf{A}_{w_m}$  соответственно.

Однако дискретизация в АЦП процесса  $\mathbf{y}_s(t)$  наиболее часто осуществляется выборочными мгновенными значениями, для которых весовая функция выбора представляет собой  $\delta$ -функцию [6]. Такой подход является некорректным при синтезе алгоритмов цифровой фильтрации непрерывных случайных сообще-

ний, так как мгновенные отсчёты при наличии в измерениях БГШ не имеют смысла, поскольку имеют бесконечную дисперсию [8].

В этом случае требуется эквивалентное разностное представление математических моделей оцениваемых и измеряемых процессов, имеющих непрерывную форму записи. Для этого перепишем (4) так, чтобы статистическая динамика векторных процессов  $\mathbf{y}_m(t)$  описывалась СДУ

$$\frac{d\mathbf{y}_m(t)}{dt} = \mathbf{A}_{w_m} \mathbf{y}_m(t) + \mathbf{F}_m \mathbf{x}(t) + \mathbf{H}_m \mathbf{G}_x \xi_x(t) + \mathbf{G}_{w_m} \xi_{w_m}(t),$$

$$\mathbf{y}_m(t_0) = \mathbf{y}_{m0}, \quad m = \overline{1, M}. \quad (5)$$

Воспользуемся далее методами теории условных марковских процессов [12], в соответствии с которыми модели (2), (5) описываются в виде совместного марковского процесса

$$\mathbf{z}(t) = [\mathbf{x}^T, \mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_m^T, \dots, \mathbf{y}_M^T]^T, \quad \text{СДУ}$$

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{F}_z \mathbf{z}(t) + \mathbf{G}_z \xi_z(t), \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{F}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_1 & \mathbf{A}_{w_1} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{F}_M & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_{w_M} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_x & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_1 \mathbf{G}_x & \mathbf{G}_{w_1} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_M \mathbf{G}_x & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{G}_{w_M} \end{bmatrix}, \quad \xi_z = \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_{w_1} \\ \vdots \\ \xi_{w_M} \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения (6) имеет вид [13]

$$\mathbf{z}(t) = \Phi_{zz}(t, t_0) \mathbf{z}_0 + \int_{t_0}^t \Phi_{zz}(t, \tau) \mathbf{G}_z \xi_z(\tau) d\tau,$$

$$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0, \quad (7)$$

где фундаментальная матрица решений  $\Phi_{zz}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{zz} = \mathbf{F}_z(t) \Phi_{zz}(t, t_0), \quad \Phi_{zz}(t, t_0) = \mathbf{I}. \quad (8)$$

Интеграл в правой части равенства (7) представляет собой векторный гауссовский процесс

с нулевым математическим ожиданием и матрицей центральных моментов второго порядка:

$$\mathbf{B}_{zz}(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Phi_{zz}(t, \tau) \mathbf{G}_z \mathbf{G}_z^T \Phi_{zz}^T(t, \tau) d\tau,$$

$$\mathbf{B}_{zz}(t_0, t_0) = \mathbf{0}. \quad (9)$$

С учётом (7)–(9), СДУ (6) может быть представлено в статистически эквивалентной форме в виде разностного уравнения с шагом дискретизации  $\Delta = t_k - t_{k-1}$ , ( $k = 1, 2, 3, \dots$  — дискретное время)

$$\mathbf{z}(k) = \Phi_{zz}(k, k-1) \mathbf{z}(k-1) + \Gamma_{zz}(k, k-1) \mathbf{n}_z(k-1),$$

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \quad (10)$$

в котором используются обозначения

$$\Phi_{zz} = \begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \Phi_{y_1x} & \Phi_{y_1y_1} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{y_Mx} & \mathbf{0} & \dots & \Phi_{y_My_M} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{zz} = \begin{bmatrix} \Gamma_{xx} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \Gamma_{y_1x} & \Gamma_{y_1y_1} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{y_Mx} & \mathbf{0} & \dots & \Gamma_{y_My_M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_x \\ \mathbf{n}_{w_1} \\ \vdots \\ \mathbf{n}_{w_M} \end{bmatrix}.$$

В рассматриваемом случае  $\mathbf{n}_x$ ,  $\mathbf{n}_{w_m}$ ,  $m = \overline{1, M}$  — векторы размером  $(n_x \times 1)$  и  $(n_{y_m} \times 1)$  соответственно независимых гауссовских случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями.

Элементы блочной матрицы  $\mathbf{B}_{zz} = \Gamma_{zz} \Gamma_{zz}^T$  имеют вид:

$$\mathbf{B}_{zz} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{xx} & \mathbf{B}_{xy_1} & \dots & \mathbf{B}_{xy_M} \\ \mathbf{B}_{y_1x} & \mathbf{B}_{y_1y_1} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{y_Mx} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B}_{y_My_M} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \Gamma_{xx} \Gamma_{xx}^T & \Gamma_{xx} \Gamma_{y_1x}^T & \dots & \Gamma_{xx} \Gamma_{y_Mx}^T \\ \Gamma_{y_1x} \Gamma_{xx}^T & \Gamma_{y_1x} \Gamma_{y_1x}^T + \Gamma_{y_1y_1} \Gamma_{y_1y_1}^T & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{y_Mx} \Gamma_{xx}^T & \mathbf{0} & \dots & \Gamma_{y_Mx} \Gamma_{y_Mx}^T + \Gamma_{y_My_M} \Gamma_{y_My_M}^T \end{bmatrix},$$

где  $\Gamma_{zz}$ ,  $\Gamma_{xx}$ ,  $\Gamma_{y_m x}$ ,  $\Gamma_{y_m y_m}$ ,  $m = \overline{1, M}$  — нижние треугольные матрицы, формируемые из соответствующих элементов блочной матрицы  $\mathbf{B}_{zz}$ , например, с помощью алгоритма Холецкого [14].

Таким образом, для неперекрывающихся интервалов времени уравнения состояния (2) и наблюдения (1) могут быть представлены из (10) в статистически эквивалентной форме:

$$\mathbf{x}(k) = \Phi_{xx}(k, k-1)\mathbf{x}(k-1) + \Gamma_{xx}(k, k-1)\mathbf{n}_x(k-1),$$

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \quad (11)$$

$$\mathbf{y}_m(k) = \Phi_{y_m x}(k, k-1)\mathbf{x}(k-1) + \Phi_{y_m y_m}(k, k-1)\mathbf{y}_m(k-1) + \Gamma_{y_m x}(k, k-1)\mathbf{n}_x(k-1) + \Gamma_{y_m y_m}(k, k-1)\mathbf{n}_{y_m}(k-1), \mathbf{y}_m(0) = \mathbf{y}_{m0},$$

$$m = \overline{1, M}. \quad (12)$$

Эквивалентное дискретное представление (11), (12) непрерывных моделей векторов сообщения (2) и измерения (1) является абсолютно точным в том смысле, что для любых  $t_k - t_{k-1} > 0$  оно позволяет получить случайные процессы с теми же статистическими характеристиками, как и решение системы СДУ (2), (5) без погрешностей аппроксимации [8].

## 2. Алгоритм оптимального многоканального комплексирования отсчётов непрерывного случайного процесса на фоне коррелированного марковского шума на основе метода разностных измерений

Применительно к моделям векторов состояния и наблюдения (1), (2) эквивалентное дискретное представление (11), (12) позволяет получить оптимальный дискретный алгоритм комплексной обработки информации (КОИ). В частности, для любой допустимой функции потерь оптимальная в среднеквадратичном смысле оценка  $\mathbf{x}^*(k)$  отсчётов вектора  $\mathbf{x}(t_k)$  непрерывного процесса (2) и ковариационная матрица ошибок дискретной КОИ  $\mathbf{R}_{xx}^*(k)$  определяются по результатам измерений

$\mathbf{y}_m(k)$ ,  $m = \overline{1, M}$  рекуррентными соотношениями

$$\mathbf{x}^*(k) = \tilde{\mathbf{x}}(k) + \sum_{m=1}^M \mathbf{K}_m(k) \times$$

$$\times (\mathbf{y}_m(k) - \Phi_{y_m y_m}(k, k-1)\mathbf{y}_m(k-1) - \tilde{\mathbf{y}}_m(k)),$$

$$\mathbf{x}^*(0) = \mathbf{M}\{\mathbf{x}(0)\}, \quad (13)$$

$$\mathbf{R}_{xx}^*(k) = \tilde{\mathbf{R}}_{xx}(k) - \sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{R}}_{xy_m}(k) \tilde{\mathbf{R}}_{y_m y_m}^{-1}(k) \tilde{\mathbf{R}}_{xy_m}^T(k),$$

$$\mathbf{R}_{xx}^*(0) = \mathbf{M}\left\{ [\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*(0)] [\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*(0)]^T \right\}, \quad (14)$$

где  $\mathbf{K}_m(k)$  — оптимальные коэффициенты передачи:

$$\mathbf{K}_m(k) = \tilde{\mathbf{R}}_{xy_m}(k) \tilde{\mathbf{R}}_{y_m y_m}^{-1}(k), \quad (15)$$

$\tilde{\mathbf{x}}(k)$  — экстраполяционная оценка и  $\tilde{\mathbf{R}}_{xx}(k)$  — экстраполяционная корреляционная матрица погрешностей предсказания:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \Phi_{xx}(k, k-1)\mathbf{x}^*(k-1), \quad (16)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{xx}(k) = \Phi_{xx}(k, k-1)\mathbf{R}_{xx}^*(k-1) \times$$

$$\times \Phi_{xx}^T(k, k-1) + \Gamma_{xx}(k, k-1)\Gamma_{xx}^T(k, k-1), \quad (17)$$

$\tilde{\mathbf{y}}_m(k)$  — прогнозируемые значения векторов измерений и  $\tilde{\mathbf{R}}_{xy_m}$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}_{y_m y_m}(k)$  — корреляционная матрица погрешностей экстраполяции измерений:

$$\tilde{\mathbf{y}}_m(k) = \Phi_{y_m x}(k, k-1)\mathbf{x}^*(k-1), \quad (18)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{xy_m}(k) = \Phi_{xx}(k, k-1)\mathbf{R}_{xx}^*(k-1) \times$$

$$\times \Phi_{y_m x}^T(k, k-1) + \mathbf{B}_{y_m x}(k), \quad (19)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{y_m y_m}(k) = \Phi_{y_m x}(k, k-1)\mathbf{R}_{xx}^*(k-1) \times$$

$$\times \Phi_{y_m x}^T(k, k-1) + \mathbf{B}_{y_m y_m}(k). \quad (20)$$

С учётом (5) выражение (13) можно представить в виде

$$\mathbf{x}^*(k) = \tilde{\mathbf{x}}(k) + \sum_{m=1}^M \mathbf{K}_m(k) \left( \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{y}_m(\tau) d\tau - \right.$$

$$\left. - \Phi_{y_m y_m}(k, k-1)\mathbf{y}_m(k-1) - \tilde{\mathbf{y}}_m(k) \right),$$

$$\mathbf{x}^*(0) = \mathbf{M}\{\mathbf{x}(0)\}. \quad (21)$$

Рекуррентное соотношение (21) совместно с (14)–(20) полностью определяет алгоритмы

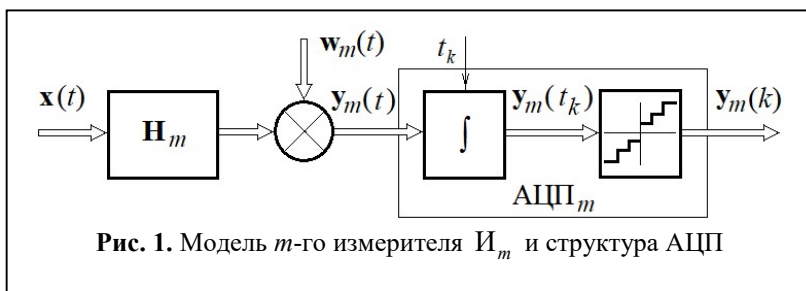


Рис. 1. Модель  $m$ -го измерителя  $I_m$  и структура АЦП

дискретной обработки непрерывного наблюдаемого процесса (1) для получения оптимальной текущей оценки  $\mathbf{x}^*(k) \equiv \mathbf{x}^*(t_k)$  отсчётов вектора состояния (2). Основной особенностью этого алгоритма является то, что в каждом АЦП измерителя производится накопление (интегрирование за время одного такта с обнулением интегратора в конце каждого такта) непрерывного наблюдения (1) на интервалах времени между соседними отсчётами оцениваемого вектора состояния (рис. 1).

При этом, как обычно, соотношения (14) и (15) позволяют заранее рассчитать оптимальные коэффициенты передачи дискретного фильтра и статистические характеристики погрешностей КОИ [3, 11].

Оптимальный МкЦФ оценивания вектора состояния (2) на фоне коррелированных шумов измерений (1), реализующий алгоритм (16), (17), (21)–(28), (32)–(33), является многоканальным с числом каналов  $M$  и в основном сохраняет структуру и все обратные связи, присутствующие оптимальному устройству (рис. 1). На вход каждого канала подаются текущие измерения  $\mathbf{y}(k) \equiv \mathbf{y}(t_k)$  с выходов соответствующих АЦП. В каждом канале вычисляются коэффициенты усиления, прогнозируемые значения векторов измерений и корреляционные матрицы погрешностей экстраполяции измерений. В общем блоке МкЦФ вычисляются текущие оценки  $\mathbf{x}^*(k) \equiv \mathbf{x}^*(t_k)$  отсчётов вектора состояния и корреляционные матрицы погрешностей оценивания и предсказания.

Для иллюстрации работоспособности синтезированного алгоритма рассмотрим простой пример.

**3. Пример: КОИ при сопровождении объекта в горизонтальной плоскости по данным двух измерителей, имеющих разную физическую природу, на фоне гауссовских марковских шумов измерений**  
По условиям постановки задачи

исходные вектор состояния  $\mathbf{x}(t)$  и коэффициенты матриц априорных уравнений (2) определяются из системы СДУ:

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \omega(t),$$

$$\frac{d}{dt}\omega(t) = -2\alpha_\omega\omega - \chi^2\phi + \sqrt{4\alpha_\omega\chi^2}\xi_1(t), \quad (22)$$

где  $\phi$  — угол пеленга на объект;  $\omega$  — угловая скорость линии визирования;  $1/\alpha_\omega = D^*/2V_{сб}$  — время, оставшееся до конца сопровождения;  $\chi$  — коэффициент, характеризующий математическое ожидание флуктуаций собственных колебаний угловой скорости линии визирования;  $V_{сб}$  — скорость сближения с объектом;  $D^*$  — текущая оценка дальности до объекта (считается, что измеряется без погрешностей).

На входах АЦП двух измерителей действуют гауссовские марковские непрерывные случайные процессы

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathbf{h}_1\mathbf{x}(t) + w_1(t), \\ y_2(t) &= \mathbf{h}_2\mathbf{x}(t) + w_2(t), \end{aligned} \quad (23)$$

где  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$  — гауссовские марковские шумы измерений, описываемые СДУ

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{dt} &= -\alpha_{w_1}w_1 + \sqrt{\frac{2\alpha_{w_1}}{q_1}}\xi_{w_1}, \\ \frac{dw_2}{dt} &= -\alpha_{w_2}w_2 + \sqrt{\frac{2\alpha_{w_2}}{q_2}}\xi_{w_2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь  $\alpha_{w_1}$ ,  $\alpha_{w_2}$  — коэффициенты, характеризующие ширину спектральной плотности коррелированных шумом измерений соответственно;  $\mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{h}_2$  — известные матрицы разме-

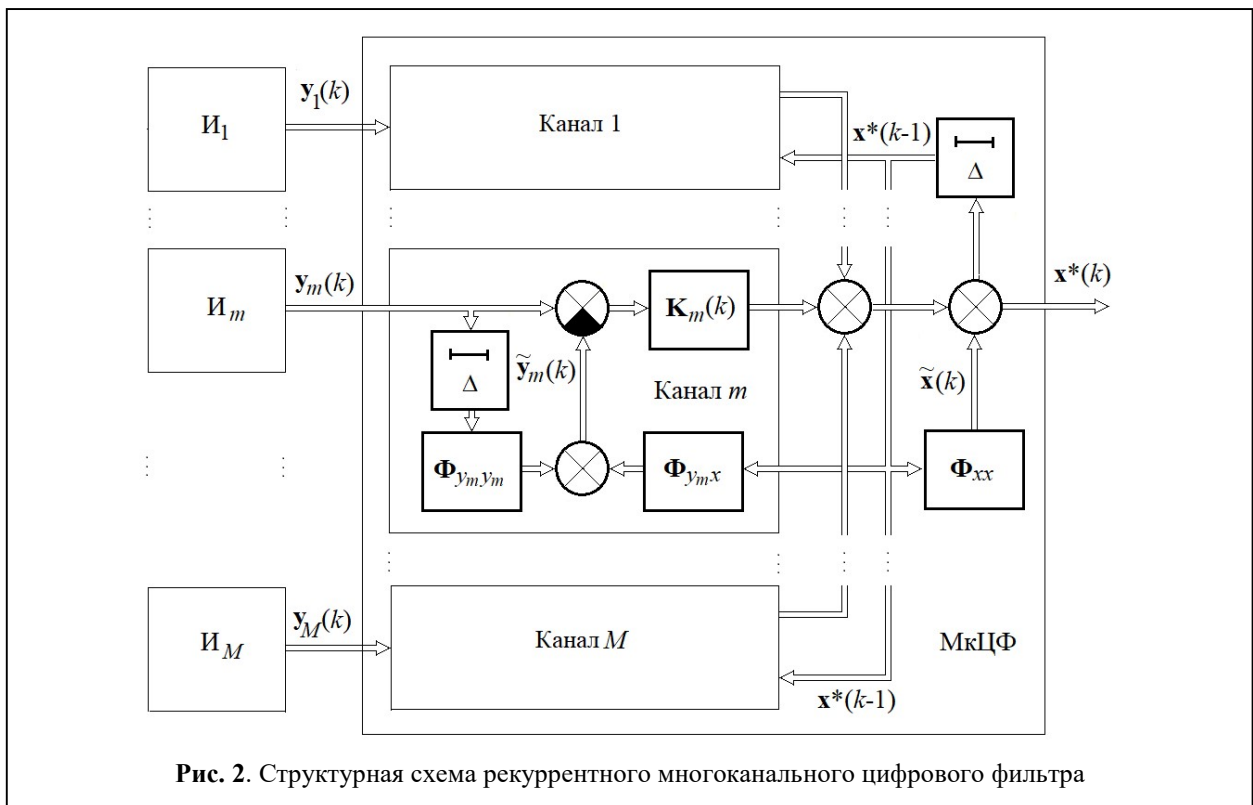


Рис. 2. Структурная схема рекуррентного многоканального цифрового фильтра

ром  $1 \times 2$ ;  $q_1 = \sigma_\omega^2 / \sigma_{w_1}^2$ ,  $q_2 = \sigma_\omega^2 / \sigma_{w_2}^2$  — отношение дисперсии процесса  $\omega(t)$  к дисперсии окрашенных шумов измерений;  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_{w_1}(t)$  и  $\xi_{w_2}(t)$  — стандартные БГШ с нулевыми математическими ожиданиями и единичными интенсивностями.

Требуется по наблюдаемым дискретным отсчетам  $y_1(k)$ ,  $y_2(k)$  получить оптимальную оценку  $\hat{x}^*(k) \equiv \hat{x}^*(t_k)$  отсчетов непрерывного случайного процесса  $\mathbf{x}(t) = [\phi \ \omega]^T$  (22).

Проверка качества оптимального алгоритма КОИ (13)–(21) проведена с помощью статистического моделирования на ЭВМ для случая, когда параметры уравнений (22)–(24) равны:  $D^*(0) = 40$  у.е.д. (условных единиц дальности);  $V_{\text{сб}} = 300$  у.е.с. (условных единиц скорости);  $\chi = \sqrt{2}\alpha_\omega$ ;  $\Delta = 1$  с;  $q_1 = q_2 = 1,5$ ;  $\alpha_{w_1} = 400\alpha_\omega$ ;  $\alpha_{w_2} = 5\alpha_\omega$ .

Согласно (21), оптимальные оценки отсчетов непрерывного случайного процесса  $\mathbf{x}(t)$

по наблюдаемым дискретным отсчетам  $y_1(k)$ ,  $y_2(k)$  вычислялись из уравнения

$$\hat{\mathbf{x}}^*(k) = \Phi_{xx}(\Delta)\hat{\mathbf{x}}^*(k-1) + \mathbf{K}_1(k) \left( \int_0^\Delta y_1(\tau) d\tau - \Phi_{y_1 y_1}(\Delta) \times y_1(k-1) - \Phi_{y_1 x}(\Delta)\hat{\mathbf{x}}^*(k-1) \right) + \mathbf{K}_2(k) \times \left( \int_0^\Delta y_2(\tau) d\tau - \Phi_{y_2 y_2}(\Delta)y_2(k-1) - \Phi_{y_2 x}(\Delta)\hat{\mathbf{x}}^*(k-1) \right), \quad (25)$$

а оптимальные коэффициенты усиления  $\mathbf{K}_1(k)$ ,  $\mathbf{K}_2(k)$ , матрицы  $\Phi_{xx}(\Delta)$ ,  $\Phi_{y_1 x}(\Delta)$ ,  $\Phi_{y_2 x}(\Delta)$  и априорные коэффициенты  $\Phi_{y_1 y_1}(\Delta)$ ,  $\Phi_{y_2 y_2}(\Delta)$  рассчитывались по формулам (15), (8) соответственно.

Определение статистических характеристик оптимальных алгоритмов КОИ проводилось методом Монте-Карло, при этом независимые гауссовские последовательности  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_{w_1}(t)$  и  $\xi_{w_2}(t)$  формировались с помощью датчиков случайных чисел. Длина реализации составляла  $k = \overline{1,150}$ .

Графики, приведённые на рис. 3 и рис. 4, иллюстрируют работоспособность оптимального алгоритма (25) при оценке измеряемого угла пеленга на объект (рис. 3) и ненаблюдаемой угловой скорости линии визирования (рис. 4).

Статистическая обработка результатов моделирования показывает выигрыш в точности оценивания угла пеленга по данным двух измерителей с одинаковыми полосами пропускания: в 1,4 раза по сравнению с оцениванием угла пеленга от 1-го измерителя; в 1,6 раза по сравнению с оцениванием угла пеленга от 2-го измерителя с более узкой полосой пропускания, что согласуется с результатами других авторов [16–18].

### Заключение

Применение метода разностных измерений не увеличивает вычислительные затраты в МкЦФ, так как размерность вектора состояния остаётся неизменной, как и при КОИ непрерывных случайных процессов на фоне БГШ. В тоже время существенно упрощается аналоговая часть АЦП по сравнению с аналогичным алгоритмом [15], т.к. задержка на один такт реализуется в МкЦФ после АЦП, а также следует отметить отсутствие операции аналогового дифференцирования присущей классическим алгоритмам фильтрации непрерывных случайных процессов в непрерывном времени по методу разностных измерений [10].

Количественная оценка ухудшения потенциальных характеристик точности и помехоустойчивости при оптимальной КОИ непрерывных случайных процессов из-за окрашенности шумов измерений и дискретизации приведена в [9, 15]. При этом влияние квантования по уровням в АЦП измерителей может учитываться согласно методике [7, 15].

Объединение измерителей (радиотехнических и нерадиотехнических) с разными полосами пропускания (автокорреляционными функциями) повышает помехозащищённость РТС и ТКС, т.к. последние не подвержены действию радиопомех [19], а информационная

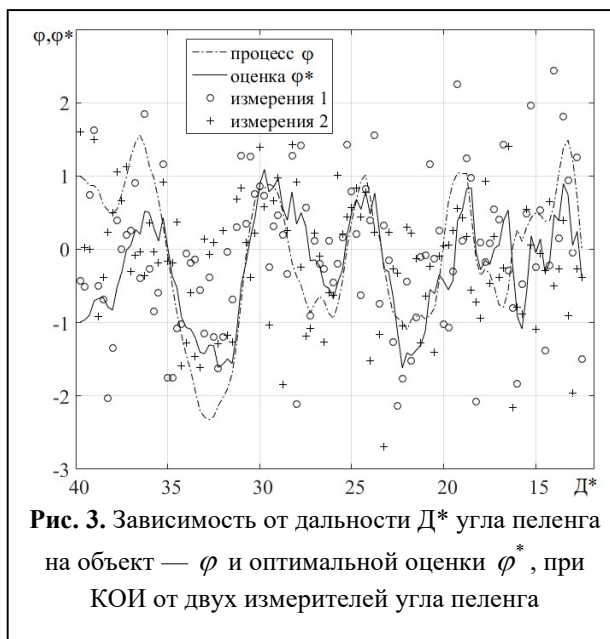


Рис. 3. Зависимость от дальности  $D^*$  угла пеленга на объект —  $\varphi$  и оптимальной оценки  $\varphi^*$ , при КОИ от двух измерителей угла пеленга

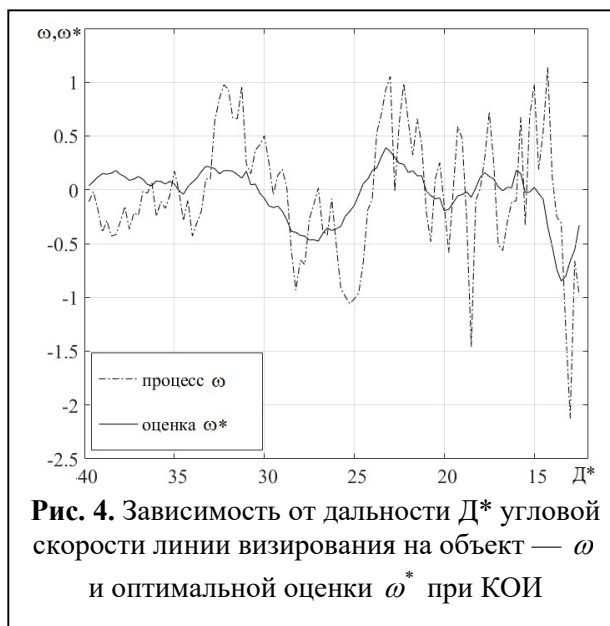


Рис. 4. Зависимость от дальности  $D^*$  угловой скорости линии визирования на объект —  $\omega$  и оптимальной оценки  $\omega^*$  при КОИ

избыточность позволяет уменьшить погрешность измерений и тем самым повысить точность РТС и ТКС.

### Литература

1. Бобнев М.П., Кривицкий Б.Х., Ярлыков М.С. Комплексные системы радиоавтоматики. М.: Советское радио, 1968. 232 с.
2. Стратонович Р.Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1966. 319 с.
3. Ярлыков М.С. Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1980. 360 с.



4. Ярлыков М.С., Михайлов Е.А. Комплексная оптимальная обработка двух непрерывных сигналов // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25. № 12. С. 2575–2584.
5. Ярлыков М.С., Миронов М.А. Оптимальное комплексирование измерителей при частично окрашенных шумах наблюдений // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27. № 10. С. 1949–1956.
6. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь. 1991. 624 с.
7. Величкин А.И. Статистический синтез цифровых фильтров // Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35. № 7. С. 1471–1480.
8. Миронов М.А. Оптимальная комплексная дискретная обработка сигналов при частично окрашенных шумах наблюдений // Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30. № 5. С. 973–980.
9. Детков А.Н. Оптимальная дискретная фильтрация отсчётов непрерывного случайного процесса на фоне коррелированного марковского шума // Труды МАИ. 2022. № 126. DOI: 10.34759/trd-2022-126-16.
10. Sage A.P., Melsa J.L. Estimation Theory with Applications to Communications and Control. New York, McGrawHill, 1971. 529 p.
11. Детков А.Н. Оптимизация алгоритмов цифровой обработки траекторных сообщений в дальномерной многопозиционной радиосистеме // Радиотехника. 1993. № 7. С. 3–8.
12. Миронов М.А. Оптимальная дискретная обработка непрерывных процессов // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38. № 1. С. 141–149.
13. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Советское радио. 1977. 488 с.
14. Гантмахер Ф.П. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010. 559 с.
15. Детков А.Н. Линейная фильтрация отсчётов непрерывного векторного сообщения на фоне коррелированного марковского шума по наблюдаемым цифровым сигналам // Радиотехника и электроника. 1995. Т. 40. № 9. С. 1406–1413.
16. Xu Y., Shmaliy Y.S., Shen T., Chen D., Sun M. INS/UWB-Based Quadrotor Localization Under Colored Measurement Noise. IEEE Sensors Journal. 2021. Vol. 21. No. 5. Pp. 6384–6392. DOI: 10.1109/JSEN.2020.3038242.
17. Stavrou P.A., Skoglund M. New Formulation and Computation of NRDF for Time-Varying Multivariate Gaussian Processes With Correlated Noise. IEEE Control Systems Letters. 2022. Vol. 6. Pp. 331–336. DOI: 10.1109/LCSYS.2021.3074455.
18. Luo Y., Zhou J., Yang W. Distributed State Estimation With Colored Noises. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs. 2022. Vol. 69. No. 6. Pp. 2807–2811. DOI: 10.1109/TCSII.2021.3136184
19. Сосулин Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М.: Радио и связь, 1992. 304 с.

Поступила 21 ноября 2023 г.

English

## OPTIMAL INTEGRATED DISCRETE-TIME PROCESSING OF CONTINUOUS RANDOM PROCESS SAMPLES IN VIEW OF CORRELATED MARKOV NOISE OBSERVATIONS

**Alexander Nikolayevich Detkov** — Grand Dr. in Engineering, Professor, Deputy Head of Department, Federal Autonomous Institution "State Research Institute of Aviation Systems".

E-mail: [detkov@gosnias.ru](mailto:detkov@gosnias.ru)

Address: 125319, Russian Federation, Moscow, Viktorenko st., 7.

*Abstract:* Algorithms for integrated optimal processing of random processes are implemented using discrete-type signal processing tools in current Radio Engineering and Telecommunication Systems (RES and TCS). Therefore, these algorithms must be synthesized as discrete-type and suitable recurrence relations for such implementation. However, mostly mathematical models of random processes evaluated and observed in RES and TCS have a continuous recording form, which is due to the physical nature of these processes. Thus, there arises a task of synthesizing optimal algorithms for discrete-type integrated processing of continuous random processes' samples. Yet, current hardware components permit using high sampling frequency in RES and TCS resulting in measurement samples' autocorrelation. Therefore, measurement noise correlation should be taken into account during steady-state synthesis of multichannel digital filters as it significantly affects the generated filtering estimates. This paper proposes a new multichannel digital filter based on difference measurements and statistically equivalent discrete-type representation of continuous state vector models and observation for solving the problem of optimal linear integrated processing for samples of a continuous vector Markov random process considering the known statistical characteristics of an additive vector Markov correlated noise. Mathematical model's structures of the measuring channel with analog-to-digital conversion

(ADC) and of the multichannel digital filter are presented. ADC key aspect is the accumulation (integration) of continuous observations at time intervals between adjacent selections of the estimated state vector. To illustrate the synthesized algorithm efficiency there is examined a simple example of optimal integrated processing of a continuous Gaussian-Markov random process of the second order with Markov correlated noise of two meters having different physical nature and a different degree of measuring samples' autocorrelation. The integrated processing efficiency is indicated. Using difference measurement method does not result in computational costs raise in a multichannel digital filter, since state vector dimension remains unchanged in the same way as for filtering continuous random processes amid white Gaussian noise. That said ADC analog part of the measuring channel is significantly simplified compared to known algorithms, since the single-cycle delay is implemented in the digital part. It should also be noted that there is no analog differentiation procedure common to classical filtering algorithms for continuous random processes in continuous time by the difference measurements' method. Joining meters (radio engineering and non-radio engineering) with different bandwidths (autocorrelation functions) increases noise immunity, because the latter are not affected by radio jamming, and information redundancy enables to reduce the measurement error and thereby to enhance RES and TCS accuracy.

*Keywords:* continuous random process, optimal discrete-type filtering, correlated noise, difference measurements' method.

### References

1. *Bobnev M.P., Krivitsky B.H., Yarlykov M.S.* Complex systems of radio automation. Moscow: Sovetskoe radio, 1968. 232 p.
2. *Stratonovich R.L.* Conditional Markov processes and their application to the theory of optimal control. Moscow: Publishing House of Moscow State University, 1966. 319 p.
3. *Yarlykov M.S.* Application of the Markov theory of nonlinear filtration in radio engineering. Moscow: Sovetskoe radio, 1980. 360 p.
4. *Yarlykov M.S., Mikhailov E.A.* Complex optimal processing of two continuous signals. Radiotekhnika i elektronika. 1980. Vol. 25. No. 12. Pp. 2575–2584.
5. *Yarlykov M.S., Mironov M.A.* Optimal integration of meters with partially colored observation noises. Radiotekhnika i elektronika. 1982. Vol. 27. No. 10. Pp. 1949–1956.
6. *Tikhonov V.I., Kharisov V.N.* Statistical analysis and synthesis of radio engineering devices and systems. Moscow: Radio i Svyaz'. 1991. 624 p.
7. *Velichkin A.I.* Statistical synthesis of digital filters. Radiotekhnika i elektronika. 1990. Vol. 35. No. 7. Pp. 1471–1480.
8. *Mironov M.A.* Optimal complex discrete signal processing with partially colored observation noises. Radiotekhnika i elektronika. 1985. Vol. 30. No. 5. Pp. 973–980.
9. *Detkov A.N.* Optimal discrete filtering of samples of a continuous random process against the background of correlated Markov noise. Proceedings of MAI. 2022. No. 126. DOI: 10.34759/trd-2022-126-16
10. *Sage A.P., Melsa J.L.* Estimation Theory with Applications to Communications and Control. New York, McGrawHill, 1971. 529 p.
11. *Detkov A.N.* Optimization of algorithms for digital processing of trajectory messages in a rangefinder multi-position radio system. Radiotekhnika. 1993. No. 7. Pp. 3–8.
12. *Mironov M.A.* Optimal discrete processing of continuous processes. Radiotekhnika i elektronika. 1993. Vol. 38. No. 1. Pp. 141–149.
13. *Tikhonov V.I., Mironov M.A.* Markov processes. Moscow: Sovetskoe radio. 1977. 488 p.
14. *Gantmakher F.R.* Theory of matrices. Moscow: Fizmatlit, 2010. 559 p.
15. *Detkov A.N.* Linear filtering of continuous vector message samples against the background of correlated Markov noise from observed digital signals. Radiotekhnika i elektronika. 1995. Vol. 40. No. 9. Pp. 1406–1413.
16. *Xu Y., Shmaliy Y.S., Shen T., Chen D., Sun M.* INS/UWB-Based Quadrotor Localization Under Colored Measurement Noise. IEEE Sensors Journal. 2021. Vol. 21. No. 5. Pp. 6384–6392. DOI: 10.1109/JSEN.2020.3038242.
17. *Stavrou P.A., Skoglund M.* New Formulation and Computation of NRDF for Time-Varying Multivariate Gaussian Processes With Correlated Noise. IEEE Control Systems Letters. 2022. Vol. 6. Pp. 331–336. DOI: 10.1109/LCSYS.2021.3074455.
18. *Luo Y., Zhou J., Yang W.* Distributed State Estimation With Colored Noises. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs. 2022. Vol. 69. No. 6. Pp. 2807–2811. DOI: 10.1109/TCSII.2021.3136184
19. *Sosulin Yu.G.* Theoretical foundations of radar and radio navigation. Moscow: Radio i Svyaz', 1992. 304 p.