

DOI 10.24412/2221-2574-2023-2-14-20

УДК 621.396

## ВЛИЯНИЕ ОКНА КАЙЗЕРА НА ПОГРЕШНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

**Альрубеи Мохаммед Абдалаббас**

аспирант кафедры радиотехники и радиосистем ФГБОУ ВО «Владимирский Государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых».

E-mail: [inj.moh3@atu.edu.iq](mailto:inj.moh3@atu.edu.iq)

**Поздняков Александр Дмитриевич**

доктор технических наук, профессор кафедры радиотехники и радиосистем ФГБОУ ВО «Владимирский Государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых».

E-mail: [11alexpoz@mail.ru](mailto:11alexpoz@mail.ru)

Адрес: 600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, д. 87.

*Аннотация:* Рассматриваются возможности оценки частоты периодического сигнала методом моментов по положению компонент спектра, полученного в результате БПФ при применении окна Кайзера, которое регулируется параметром  $\beta$ . Методическая составляющая погрешности оценки частоты, обусловленная влиянием вида оконной функции, зависит от степени близости истинного значения частоты и положения энергетического центра оконной функции. Погрешность определяется шагом частотной сетки, выбранным значением параметра  $\beta$ , числом учитываемых спектральных линий, длительностью интервала дискретизации сигнала. Метод моментов позволяет найти абсциссу «центра тяжести», получить средневзвешенную оценку положения пика энергетического спектра с учётом его растекания. Получены значения погрешности и даны рекомендации по выбору параметров оконной функции. Наименьшую методическую погрешность, обусловленную влиянием окна Кайзера и неидеальностью алгоритма поиска энергетического пика спектра, можно получить при  $\beta = 15$ , количестве отсчётов от 256, числе линий спектра 11 и более.

*Ключевые слова:* частота, гармонический сигнал, метод, отсчёт, погрешность, спектр.

Измерение частоты периодического сигнала осуществляется в системах контроля, испытаний и мониторинга радиоэлектронных средств. Методы измерения частоты можно разделить на группы, в основе которых лежит представление сигнала во временной и в частотной области [1–5]. Во временной области наибольшее применение получили методы дискретного счёта и интерполяции [6], а в частотной — методы спектрального анализа с использованием алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), определение максимальной спектральной составляющей и последующее уточнение координаты максимума посредством математических преобразований, например, путём интерполяции.

Известны алгоритмы измерения частоты гармонических сигналов, основанные на вычислении взвешенного максимума с помощью итерационных вычислений БПФ [7–10]. Частоту периодического сигнала можно оценить ме-

тодом моментов [9] по положению компонент спектра, полученного в результате прямого преобразования Фурье. При этом погрешность определяется шагом частотной сетки, видом используемой оконной функции, числом учитываемых спектральных линий, длительностью интервала дискретизации сигнала. Метод моментов позволяет получить средневзвешенную оценку положения пика энергетического спектра с учётом его растекания. Методическая составляющая погрешности оценки частоты, обусловленная влиянием вида оконной функции, зависит от степени близости истинного значения частоты и положения энергетического центра оконной функции.

В статье рассматриваются возможности оценки частоты периодического сигнала методом моментов [11, 12, 14] по положению компонент спектра, полученного в результате БПФ. При этом погрешность определяется шагом частотной сетки, равным отношению ча-

стоты дискретизации  $f_0$  к числу отсчётов  $N$ , видом используемой оконной функции, числом учитываемых спектральных линий, длительностью интервала дискретизации сигнала. Метод моментов позволяет получить средневзвешенную оценку положения пика энергетического спектра с учётом его растекания. Методом моментов находится абсцисса «центра тяжести», которая для дискретной функции может быть представлена в виде формулы:

$$x_{cp} = \frac{\sum_{i \in I} x_i f_i^p(x_i)}{\sum_{i \in I} f_i^p(x_i)},$$

где  $x_i$  — дискретное значение аргумента, центр которого определяется;  $f_i(x_i)$  — значение дискретной функции;  $p$  — порядок, определяющий физический смысл «центра тяжести» ( $p = 1$  — по площади;  $p = 2$  — по энергии);  $i$  — значение номера учитываемой спектральной составляющей, расположенной в зоне растекания.

Когда в окно выборки попадает нецелое число периодов сигнала, на границах окна образуются разрывы, приводящие к появлению дополнительных спектральных компонент в частотной области. Для уменьшения влияния спектральной утечки применяется предварительное сглаживание временной последовательности, что достигается умножением всех отсчётов сигнала на весовые коэффициенты

специальной оконной функции.

Известно много различных окон, отличающихся по степени сглаживания [13], разрешающей способности и т.д. Это затрудняет выбор окна для конкретной задачи, заключающейся в минимизации отклонения положения на оси частот энергетического максимума спектра сигнала от истинного значения частоты этого сигнала.

Широко применяется окно Кайзера, которое описывается выражением:

$$\omega(n) = \frac{I_0 \left( \beta \sqrt{1 - \left( \frac{2n - N - 1}{N - 1} \right)^2} \right)}{I_0(\beta)},$$

где  $I_0$  — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка;  $\beta$  — коэффициент, определяющий долю энергии, сосредоточенной в главном лепестке спектра оконной функции;  $N$  — количество точек массива оконной функции (ширина окна);  $n$  — индекс массива,  $0 \leq n \leq N - 1$ . На рис. 1 приведены варианты окна Кайзера для объема выборки 512 и разных значений параметра  $\beta = 4, 8$  и 15. На рис. 2 приведены примеры спектров чётной (а) и нечётной (б) структуры.

При нечётной симметрии спектра относительно одной компоненты учитывается одинаковое число соседних линий снизу и сверху.

Энергетический максимум спектра совпадает с центральной спектральной линией номер 4. В расчётах следует учитывать нечётное число максимальных по уровню компонент: три с номерами 3, 4 и 5; пять с номерами 2, 3, 4, 5 и 6 и так далее.

При чётной симметрии энергетический максимум расположен посередине компонент 3 и 4 и в расчётах следует учитывать чётное число спектральных

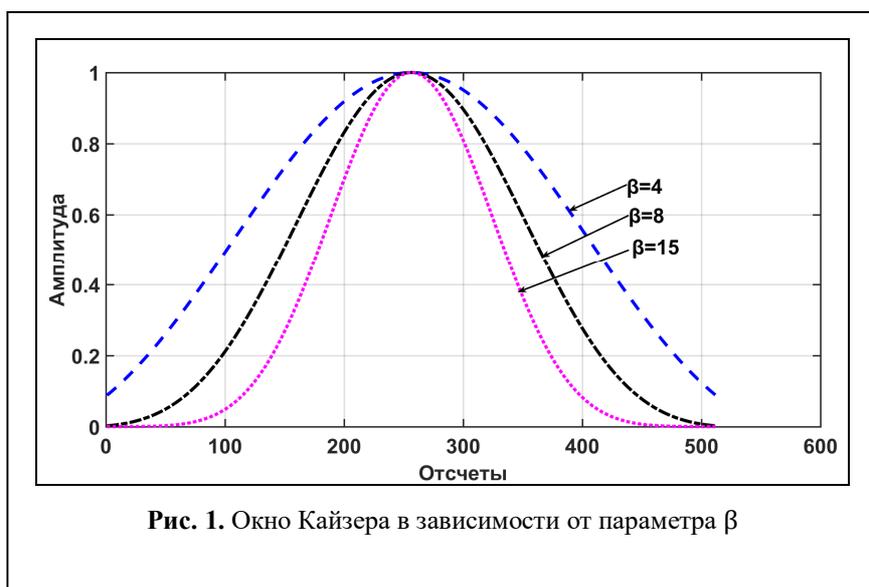


Рис. 1. Окно Кайзера в зависимости от параметра  $\beta$

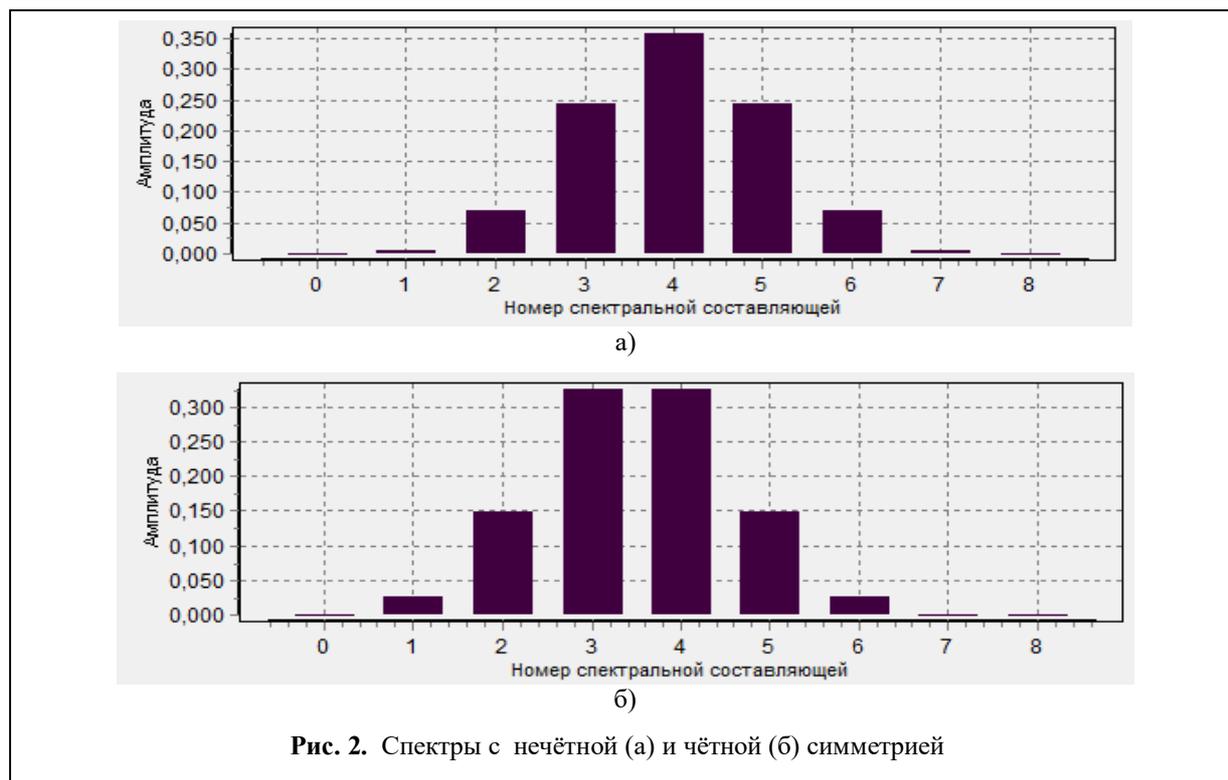


Рис. 2. Спектры с нечётной (а) и чётной (б) симметрией

линий. Если учитывать нечётное число, то в зоне изменения частоты сигнала или дискретизации скачкообразно изменяется положение «центра тяжести» на оси частот. Если компонента 3 по уровню даже немного больше чем 4, то будут учитываться номера 2, 3 и 4. При незначительном превышении компоненты 4 учитываемые компоненты скачком станут учитываться номера 3, 4 и 5.

На рис. 3 показан интерфейс моделирующей программы для окна Кайзера при выборке

1024 значения и нечётной структуре с числом компонент 7. График методической погрешности имеет вид периодической функции с полугими участками близкой к нулю погрешности в зонах нечётной симметрии и разрывами с резкими выбросами погрешности противоположной полярности при приближении к чётной структуре спектра.

В диапазоне небольшого отклонения длительности выборки от целого числа периодов погрешность изменяется плавно. В области

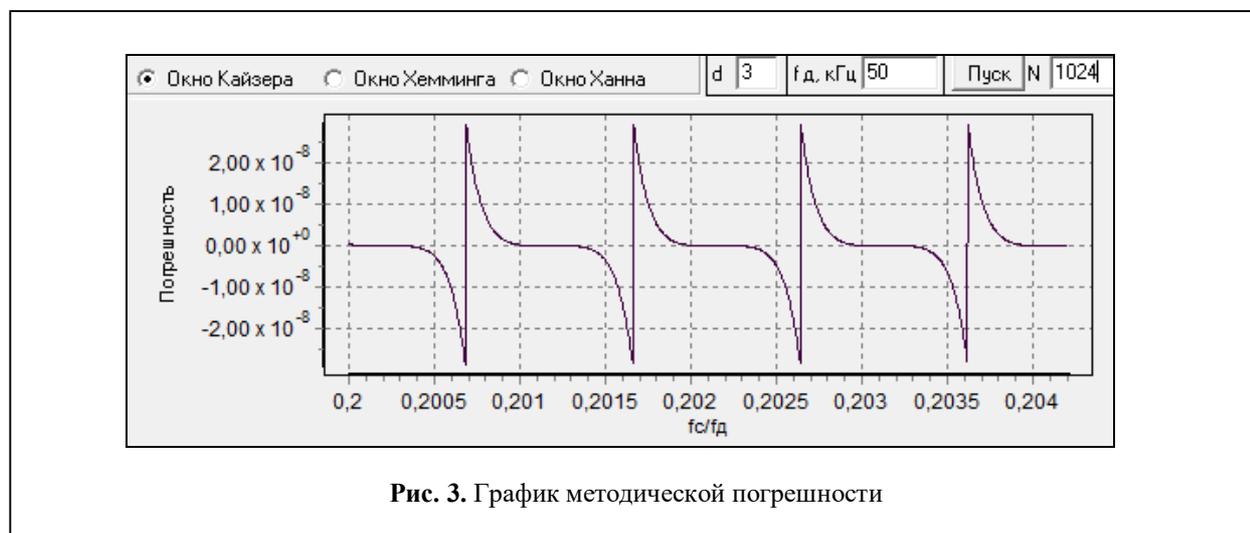


Рис. 3. График методической погрешности

симметрии чётной структуры спектра при изменении уровней главных компонент 3 и 4 образуется скачок погрешности.

Моделирование показало, что для уменьшения методической погрешности при приближении к зоне чётной симметрии следует учитывать чётное число спектральных линий путем добавления дополнительной компоненты.

Выбор между нечётной и чётной структуры можно сделать автоматическим при отношении уровней двух максимальных компонент 0,5...0,9. Граница близости должна устанавливаться по результатам анализа влияния конкретного окна. Можно переходить от нечётного к чётному числу линий спектра вблизи зоны скачка или работать с чётным числом компонент даже для нечётной структуры спектра.++

Алгоритм оценки частоты сигнала можно представить в виде шагов:

1. выбирают частоту дискретизации  $f_d$  и объем выборки  $N$  таким образом, чтобы получить необходимое разрешение по частоте  $f_d/N$ ;
2. получают в заданном объёме ( $N = 8, 16, 32, \dots, 1024, 2048, 4096, 8192 \dots$ ) массив отсчётов  $u[i/f_d]$ . Минимальное значение  $N = 8$  при длительности выборки не менее двух периодов сигнала;
3. выбирают временное окно и накладывают его на полученный массив  $u[i/f_d]$ ;
4. вычисляют БПФ, получая комплексный спектр  $S[i f_d / N] = \text{FFT}(u[i / f_d])$ ;
5. в комплексном спектре  $S[i f_d / N]$  определяют номер  $m$ ; спектральной линии сетки БПФ, амплитуда которой максимальна;
6. оценивают уровень ближайших к максимальной составляющей компонент и выбирают алгоритм взвешивания чётного или не-

чётного числа линий спектра;

7. вычисляют частоту сигнала по формуле:

$$f_c \approx \frac{\sum_{i=m-d}^{m+d} |S_i [i \cdot f_d / N]|^p \cdot i \cdot f_d / N}{\sum_{i=m-d}^{m+d} |S_i [i \cdot f_d / N]|^p},$$

где  $m$  — номер спектральной компоненты максимального уровня;  $S_i$  — амплитуды спектральных компонент;  $d$  — число дополнительных линий спектра близких к  $m$  сверху и снизу;

9. оценивают погрешности и смещение частоты сигнала.

Результаты компьютерного моделирования для  $\beta = 4, 8$  и  $15$  представлены ниже в табличной форме и в виде графиков. В таблицах 1, 2 и 3 приведены максимальные значения методической погрешности оценки частоты для разного числа отсчётов и количества учитываемых спектральных линий.

Для трёх спектральных компонент и выборки от 16 до 256 меньшие погрешности, соответственно, от 1% до 0,01% получаются при  $\beta = 4$ .

Для пяти и семи компонент и выборок от 16 до 256 меньшие погрешности, соответственно, от  $6E-4$  до  $5E-8$  получаются при  $\beta = 8$ .

Для девяти и большего числа компонент и выборок от 32 до 256 меньшие погрешности, соответственно, от  $3E-8$  до  $3E-14$  получаются при  $\beta = 15$ .

На графиках представлены максимальные погрешности для  $\beta=4, 8$  и  $15$ ,

На рис. 4 приведены графики методической погрешности оценки частоты по трем спектральным линиям для выборок от  $2^3$  до  $2^{13}$ .

Таблица 1

N	Максимальная погрешность для $\beta = 4$ и числа спектральных линий					
	3	5	7	9	11	13
16	1.1E-2	5.4E-3	5.4E-3	-	-	-
32	3.8E-4	3.7E-4	2.9E-4	2.3E-4	1.9E-4	1.6E-4
64	2.9E-4	2.7E-4	2.2E-4	1.9E-4	1.6E-4	1.5E-4
128	1.7E-4	1.6E-4	1.3E-4	1.2E-4	1.1E-4	9.7E-5
256	9.4E-5	8.7E-5	7.5E-5	6.6E-5	6.0E-5	5.6E-5

Таблица 2

N	Максимальная погрешность для $\beta = 8$ и числа спектральных линий					
	3	5	7	9	11	13
16	9.0E-2	5.7E-4	2.7E-5	-	-	-
32	1.1E-2	2.9E-5	6.8E-7	6.7E-7	6.7E-7	6.7E-7
64	4.7E-3	7.9E-6	5.3E-8	7.6E-8	6.3E-8	5.2E-8
128	2.1E-3	2.9E-6	5.7E-8	5.9E-8	7.1E-8	7.7E-8
256	1.0E-3	1.2E-6	4.9E-8	4.2E-8	4.2E-8	4.2E-8

Таблица 3

N	Максимальная погрешность для $\beta = 15$ и числа спектральных линий					
	3	5	7	9	11	13
16	2.9E-2	9.0E-3	-	-	-	-
32	2.9E-2	3.4E-3	5.8E-5	2.8E-8	8.0E-11	8.0E-11
64	1.3E-2	1.3E-3	1.9E-5	5.2E-9	6.4E-13	6.3E-13
128	5.9E-3	5.9E-4	7.9E-6	1.5E-9	1.1E-13	1.3E-13
256	2.9E-3	2.8E-4	3.6E-6	5.9E-10	3.7E-14	2.9E-14

При  $2^3$  отсчётах метод не работает, так как не хватает частотной сетки БПФ, минимальной можно считать выборку  $2^4$ . Лучшим является окно Кайзера с параметром  $\beta = 4$ .

На рис. 5 приведены графики методической погрешности оценки частоты по пяти спектральным линиям для выборок от 24 до 213. Минимальной можно считать выборку 25.

Лучшим является окно Кайзера с параметром  $\beta = 8$ .

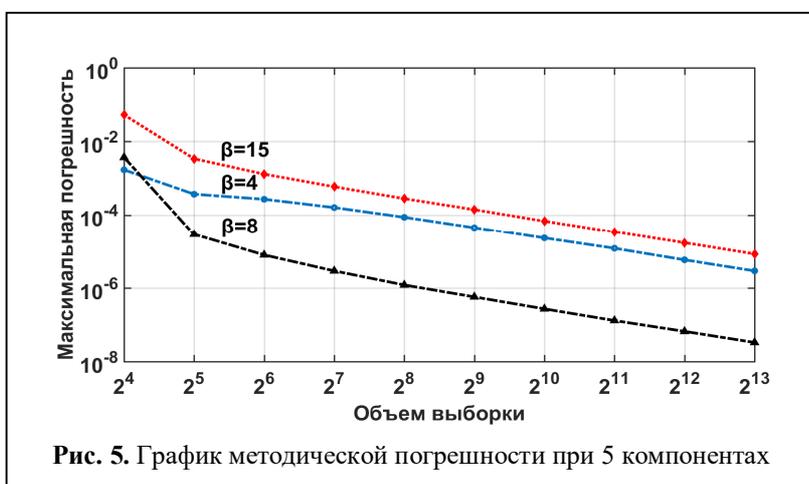
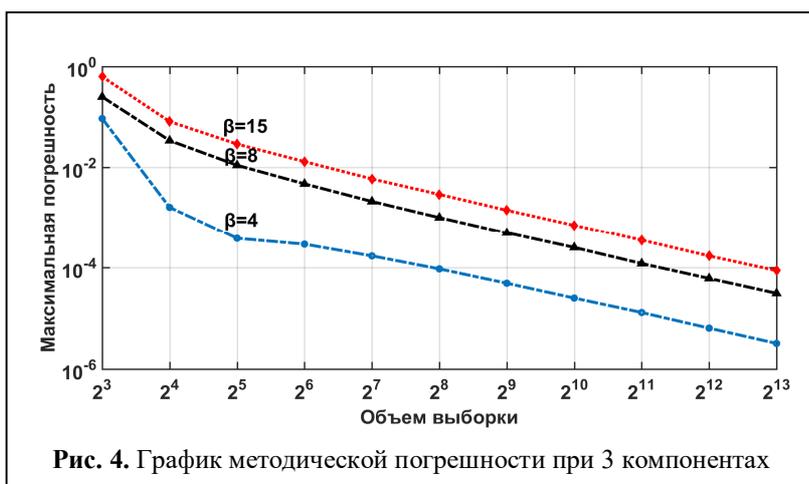
На рис. 6 приведены графики методической погрешности оценки частоты по пятнадцати спектральным линиям для выборок от 26 до 213. Лучшим является окно Кайзера с параметром  $\beta = 15$ .

Выводы.

1. Наименьшую методическую погрешность  $3E-14$ , обусловленную влиянием окна Кайзера и неидеальностью алгоритма поиска энергетического пика спектра, можно получить при  $\beta = 15$ , количестве отсчётов от 256, числе линий спектра 11 и более.

2. Окна Кайзера при  $\beta = 8$  и 4 лучше работают в области меньших выборок при удовлетворительной методической погрешности.

3. При допустимой методической погрешности определения частоты гармони-



ческого сигнала в пределах  $1.0E-5 \dots 1.0E-2$  (0,01 ... 1%) для окна Кайзера и  $\beta = 4$  достаточно учесть от 3 до 5 спектральных линий при 16 отсчётах.

4. При допустимой погрешности определения частоты гармонического сигнала в пределах  $1.0E-6 \dots 1.0E-4$  для окна Кайзера и  $\beta = 8$  достаточно учесть от 3 до 5 спектральных линий при 16 отсчётах.

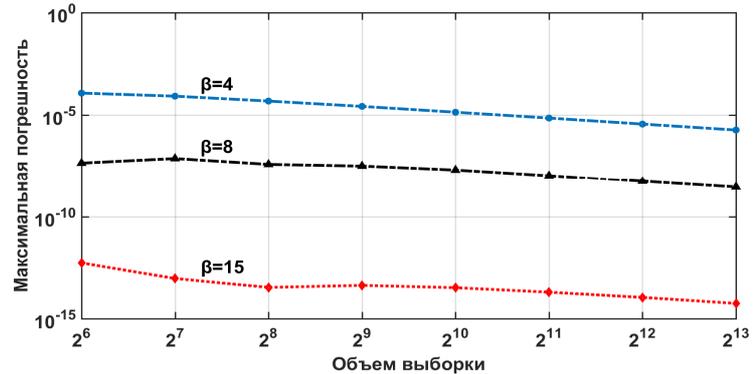


Рис. 6. График методической погрешности при 15 компонентах

### Литература

1. Harris F.J. On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform // Proceedings of the IEEE. 1978. Vol. 66. No. 1. Pp. 51–83.
2. Quinn B.G. Estimating frequency by interpolation using Fourier coefficients // IEEE Transactions on Signal Processing. 1994. Vol. 42(5). Pp. 1264–1268.
3. Jacobsen E., Kootsookos P. Fast, accurate frequency estimators [DSP Tips & Tricks] // IEEE Signal processing magazine. 2007. Vol. 24(3). Pp. 123–125.
4. Гнездилов Д.С., Матвеев Б.В. Сравнительный анализ цифровых интерполяционных алгоритмов оценки частоты радиосигнала // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2013. Том 9. №2. С. 37–39
5. Каюков И.В., Манелис В.Б. Сравнительный анализ различных методов оценки частоты сигнала // Известия вузов. Радиоэлектроника. 2006. № 7. С. 42–55.
6. Bischl B. Ligges U., Weihs C. Frequency estimation by DFT interpolation: a comparison of methods. Signal Processing Magazine. 2009. Pp. 1–9.
7. Розенберг В.Я. Введение в теорию точности измерительных систем. М.: Сов. Радио. 1975. 304 с.
8. Поздняков А.Д., Поздняков В.А. Автоматизация экспериментальных исследований, испытаний

и мониторинга радиосистем. М.: Радиотехника, 2004. 207 с.

9. Поздняков А.Д., Аль Рубеи М.А. Определение частоты дискретизированного гармонического сигнала по положению энергетического пика спектра // Проектирование и технология электронных средств. 2022. № 2. С. 30–34

10. Соболев В.С., Кацеева Г.А., Щербаченко А.М. Анализ алгоритма оценки мгновенной частоты аналитического сигнала // Измерительная техника. 2000. №8. С. 57–61.

11. Атаянц Б.А., Паршин В.С. Измерение частоты гармонического сигнала, принимаемого на фоне аддитивного белого шума, по его короткой реализации // Измерительная техника. 2004. № 6. С. 42–46.

12. Рабинер Л., Голд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир. 1978. 848 с.

13. Prabhu K.M.M. Window functions and their applications in signal processing. Boca Raton: CRC Press, 2014. 404 p.

14. Соболев В.С., Кацеева Г.А., Щербаченко А.М. Анализ алгоритма оценки мгновенной частоты аналитического сигнала // Измерительная техника. 2000. №8. С. 57–61.

Поступила 16 февраля 2023 г.

English

## KAISER WINDOW EFFECT ON ESTIMATION ERROR OF HARMONIC SIGNAL FREQUENCY BY MOMENTS METHOD

Mohammed Abdallabbas Alrubei — Postgraduate Student, Department of Radio Engineering and Radio Systems “Vladimir State University named after A.G. and N.G. Stoletovs”.

E-mail: [inj.moh3@atu.edu.iq](mailto:inj.moh3@atu.edu.iq)

**Alexander Dmitrievich Pozdnyakov** — Grand Dr. in Engineering, Professor of Department of Radio Engineering and Radio Systems, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “Vladimir State University named after A.G. and N.G. Stoletovs”.

E-mail: [11alexpoz@mail.ru](mailto:11alexpoz@mail.ru)

Address: 600000, Russian Federation, Vladimir, Gorky St., 87.

**Abstract:** Frequency measurement of periodic signal is done in systems of control, testing and monitoring of radio electronic equipment. Frequency measurement methods can be divided into groups based on the signal representation in time and frequency domain. Methods of digital numbers and digital interpolation are most widely used in time domain while frequency domain uses spectral analysis methods through fast-Fourier-transform (FFT) algorithms, defining the maximum spectral component and subsequent determination of maximum coordinate by mathematical manipulations, for example, via interpolation. This article looks into options of estimating periodic signal frequency by moments' method through the position of spectrum components resulting from FFT using Kaiser window, which is controlled by  $\beta$  parameter. Methodic component of frequency estimation error due to the influence of window function type depends on proximity degree of frequency true value and position of the energy center of window function. The error is determined via frequency chart range, selected value of  $\beta$  parameter, the number of spectral lines taken into account, and the duration of signal sampling interval. Moments' method enables to find longitudinal center of gravity, to obtain weighted average estimation of the peak position for energy spectrum considering its leakage. Error values are obtained and recommendations are given for choosing window function parameters. Due to Kaiser window effect and imperfection of the search algorithm for the spectrum energy peak, the least methodic error can be obtained at  $\beta = 15$ , numeric value strating from 256, with the number of spectrum lines as 11 and more.

**Keywords:** frequency, harmonic signal, method, numeric value, error, spectrum.

### References

1. *Harris F.J.* On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform. Proceedings of the IEEE. 1978. Vol. 66. No. 1. Pp. 51–83.
2. *Quinn B.G.* Estimating frequency by interpolation using Fourier coefficients. IEEE Transactions on Signal Processing. 1994. Vol. 42(5). Pp. 1264–1268.
3. *Jacobsen E., Kootsookos P.* Fast, accurate frequency estimators [DSP Tips & Tricks]. IEEE Signal processing magazine. 2007. Vol. 24(3). Pp. 123–125,
4. *Gnezdilov D.S., Matveev B.V.* Comparative analysis of digital interpolation algorithms for estimating the frequency of a radio signal. Proceedings of Voronezh State University. 2013. Vol. 9. No. 2. Pp. 37–39
5. *Kayukov I.V., Manelis V.B.* Comparative analysis of various methods of signal frequency estimation. Journal of the Russian Universities. Radioelectronics. 2006. No. 7. Pp. 42–55.
6. *Bischl B. Ligges U., Weihs C.* Frequency estimation by DFT interpolation: a comparison of methods. Signal Processing Magazine. 2009. Pp. 1–9.
7. *Rosenberg V.Ya.* Introduction to the theory of accuracy of measuring systems. Moscow: Sov. Radio. 1975. 304 p.
8. *Pozdnyakov A.D., Pozdnyakov V.A.* Automation of experimental research, testing and monitoring of radio systems. Moscow: Raditehnika, 2004. 207 p.
9. *Pozdnyakov A.D., Al Rubei M.A.* Determination of the frequency of a sampled harmonic signal by the position of the energy peak of the spectrum. Design and technology of electronic means. 2022. No. 2. Pp. 30–34
10. *Sobolev V.S., Kashcheeva G.A., Shcherbachenko A.M.* Analysis of the algorithm for estimating the instantaneous frequency of an analytical signal. Measurement techniques. 2000. No.8. Pp. 57–61.
11. *Atayants B.A., Parshin B.C.* Measurement of the frequency of a harmonic signal received against the background of additive white noise, according to its short implementation. Measurement techniques. 2004. No. 6. Pp. 42–46.
12. *Rabiner L., Gould B.* Theory and application of digital signal processing. Moscow: Mir. 1978. 848 p.
13. *Prabhu K.M.M.* Window functions and their applications in signal processing. Boca Raton: CRC Press, 2014. 404p.
14. *Sobolev V.S., Kashcheeva G.A., Shcherbachenko A.M.* Analysis of the algorithm for estimating the instantaneous frequency of an analytical signal. Measurement techniques. 2000. No. 8. Pp. 57–61.