

УДК 519.872

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ КАЧЕСТВА ОБСЛУЖИВАНИЯ В СИСТЕМЕ W/G/1 С КОРРЕЛИРОВАННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ

Буранова Марина Анатольевна

кандидат технических наук, доцент, начальник управления организации учебного процесса, доцент кафедры информационной безопасности (ИБ) ФГБОУ ВО «Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики».

E-mail: buranova-ma@psuti.ru

Адрес: 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Л. Толстого, д. 23.

Аннотация: В статье приведён анализ коррелированной очереди в системе типа W/G/1. При этом в качестве примера произвольного распределения интервалов времени между пакетами рассматривается распределение Вейбулла, а времён обработки пакетов — гамма распределение. Получены значения оценок задержки и вариации задержки в очереди при наличии корреляций интервалов времени между пакетами и времён обработки пакетов. Для решения задачи в работе используется теория копул. Приведён анализ взаимной корреляции интервалов времени между пакетами и времён обработки пакетов, в результате которого показана зависимость между коэффициентом корреляции Пирсона и параметром копулы Фарли — Гумбеля — Моргенштерна. Приведён анализ поведения задержки и вариации задержки в зависимости от параметра копулы, а, следовательно, от степени корреляции в очереди.

Ключевые слова: корреляция, копулы, качество обслуживания, задержка, вариация задержки.

При анализе инфокоммуникационных сетей и оценке параметров качества обслуживания QoS (Quality of Service) потоков, таких, как задержка, вариация задержки — как правило, предполагают не только независимость потоков, но и отсутствие корреляций внутри очереди [1–4]. Такие предположения могут привести к неоправданно оптимистичным прогнозам оценки параметров работы сетей. Следует обратить внимание, что многочисленные исследования трафика инфокоммуникационных сетей доказывают обратное [5–8], то есть потоки отличаются от простейших, отмечается наличие свойств самоподобия у трафика и корреляционных связей между временными последовательностями обслуживаемых пакетов. В то же время, например, в работе [6] приведены доказательства того, что имеется зависимость между интервалами времени между пакетами и временами обработки пакетов в очереди.

В работах [1, 5, 6, 8] представлены модели очереди с учётом наличия корреляций. Следует заметить, что данные работы основаны на предположении об экспоненциальном распределении длин пакетов и интервалов времени между пакетами, что нехарактерно для совре-

менных потоков [5–8]. Кроме того, анализ в данных работах посвящён оцениванию задержки, а оценка изменения задержки при передаче пакетов (джиттер, вариация задержки) не рассматривается.

В работе [9] приведён результат анализа параметров функционирования сети SDN (Software-Defined Networking), где учитывается наличие взаимной корреляции последовательностей интервалов времени между пакетами и времён обработки пакетов, при этом случайные интервалы времени между пакетами распределены по экспоненциальному закону, что соответствует модели очереди M/G/1.

В работе [10] был рассмотрен пример оценивания параметров качества обслуживания трафика в системе G/G/1 с коррелированной очередью, при этом в [10] рассматривается система, где в качестве примера произвольного распределения G на обеих позициях используется распределение Вейбулла. Поскольку большинство современных приложений в инфокоммуникационных сетях генерируют потоки, в которых случайные интервалы времени между пакетами и длины пакетов лучше описываются распределениями с «тяжёлыми хво-

стами» [11], возникает необходимость исследования систем, где в качестве примеров произвольных распределений G используются именно такие распределения, что является главной целью данной работы. Поэтому в данной работе рассматривается пример, где используется распределение Вейбулла с коэффициентом вариации больше единицы для интервалов времени между пакетами и гамма распределение для времён обработки пакетов, следовательно, в качестве примера системы $G/G/1$ рассматривается система $W/\Gamma/1$.

Модель коррелированной очереди

Рассмотрим канал связи с конечной пропускной способностью, соединяющий два узла — узел 1 и узел 2 (рис. 1), аналогично подходу, показанному в [5]. Пакеты передаются от узла 1 к узлу 2. Интервал времени между пакетами определяется временем между окончанием передачи i -го пакета и началом передачи $(i + 1)$ -го пакета (рис. 1). Так как канал, соединяющий два узла, имеет конечную пропускную способность, он не может отправлять количество пакетов от узла 1 к узлу 2, превышающее пропускную способность канала, следовательно, для пакетов большей длительности требуется более длительное время передачи в обоих узлах. Поэтому интервалы времени между пакетами, прибывающими в узел 2 сильно коррелированы со временами обслуживания в узле 2. Данную модель можно использовать для определения задержки и изменения задержки в очереди с учётом корреляций. Сле-

довательно, модель очереди можно представить в виде системы $G/G/1$.

Модель, показанная на рис. 1, позволит получить значения оценок средней задержки пакетов в очереди, а изменение задержки может быть определено как вариация задержки пакета [12]. Вариация задержки пакета в очереди $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$, где $D(X)$ — дисперсия задержки пакетов. Если ввести обозначение $f_T(x)$ — плотность вероятностей случайной величины T (где T — время ожидания пакета в очереди) дисперсию задержки можно определить согласно выражению:

$$D(X) = \int_0^{\infty} [x - M(X)]^2 f_T(x) dx. \quad (1)$$

Для учета корреляций рассмотрим подход, показанный в [13] для определения двумерных плотностей вероятностей с использованием копул. При определении времени ожидания пакета в очереди и вариации задержки фактически задача сводится к определению $f_T(x)$ — функции плотности вероятности для времени ожидания в очереди.

В [2–4] показано, что если учесть предположение Линдли [1], заключающееся в том, что $(i + 1)$ -й пакет не будет ждать в очереди при выполнении условия, что интервал времени между приходом $(i + 1)$ -го и i -го пакета больше, чем время задержки i -го пакета в узле сети, то можно записать $T_i = X_i + Y_i$, где X_i — время ожидания i -го пакета в оче-

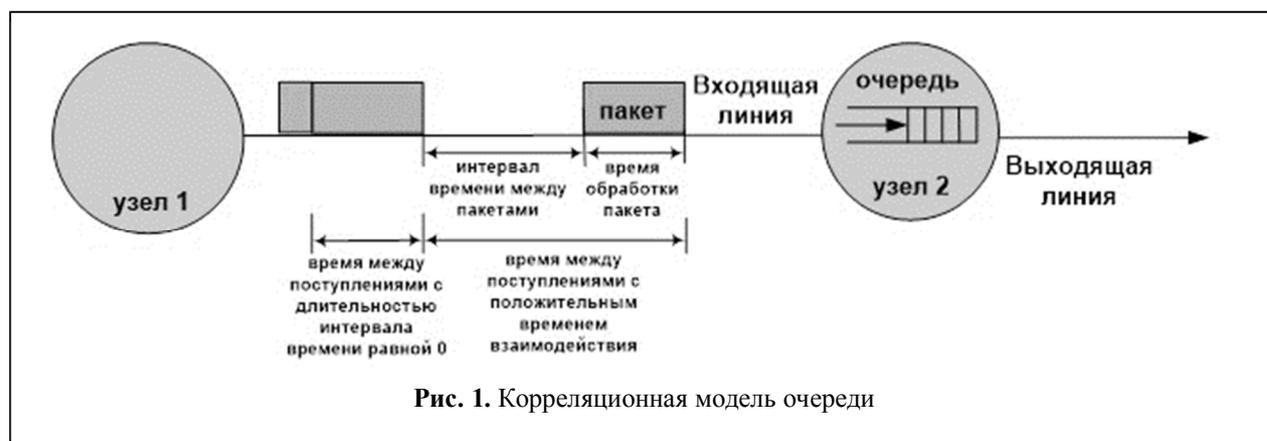


Рис. 1. Корреляционная модель очереди

реди и Y_i — время его обслуживания. Предполагая стационарность процесса передачи пакетов, опустим индекс i

$$T = X + Y. \quad (2)$$

В дальнейшем рассмотрим функции плотности вероятностей рассматриваемых случайных величин: $f_X(x)$ — функция плотности вероятности для времени между поступлениями; $f_Y(y)$ — функция плотности вероятности для времени обслуживания;

В рассматриваемом случае при определении параметров функционирования необходимо учитывать наличие зависимостей между временными интервалами между пакетами и временами обработки пакетов.

Законы распределения случайных величин X и Y можно определить, анализируя реализацию случайного процесса.

Тогда плотность распределения случайной величины T запишется в виде

$$f_T(z) = \int_0^{\infty} f_{X,Y}(y, z-y) dy. \quad (3)$$

Одним из известных подходов по определению двумерной плотности двух зависимых случайных величин является использование копул, на основе результатов теоремы Склара [14], а методика применения такого подхода представлена в [13].

Согласно показанному в [14,15] для $f_{X,Y}(x,y)$ получим

$$f_{X,Y}(x,y) = c(F_X(x), F_Y(y)) f_X(x) f_Y(y), \quad (4)$$

где $c(u,v) = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}$ — плотность (производная) копулы, для нашего случая $u = F_X(x)$; $v = F_Y(y)$ — функции распределения случайных величин.

Анализ имеющихся подходов по применению копул [13] показал, что наиболее удобной для использования в нашем случае являются копулы Фарли — Гумбеля — Моргенштерна.

Копулу Фарли — Гумбеля — Моргенштерна [14–18] можно представить в виде:

$$C(u,v) = uv \left[1 + \theta(1-u)^p(1-v)^p \right], \quad (5)$$

θ — параметр копулы $\theta = \theta(R)$, R — коэффициент корреляции, p — параметр расширения.

Следует учесть, что параметр θ должен удовлетворять следующим условиям

$$-\left(\max(1, p^2)\right)^{-2} \leq \theta < \frac{1}{p},$$

p — целое число ($p = 2, 3, \dots$).

При $p = 2$ получим, что θ определяется в диапазоне $(-0,5 \leq \theta < 0,5)$, а выражение для

$f_{X,Y}(x,y)$ можно записать в следующем виде

$$f_{X,Y}(x,y) = \left[1 + \theta(1-2u)(1-2v) \right] f_X(x) f_Y(y). \quad (6)$$

Для анализа рассмотрим поток, случайные интервалы времени между пакетами которого описываются распределением Вейбулла, а случайные интервалы времени обработки пакетов — гамма распределением. То есть рассматривается система W/Г/1, где W — распределение Вейбулла, Г — гамма распределение.

Функция распределения и плотность распределения Вейбулла имеют вид

$$F(x) = 1 - \exp \left[-\left(\frac{x}{a}\right)^b \right], \quad (7)$$

$$f(x) = \left(\frac{b}{a}\right) \left(\frac{x}{a}\right)^{(b-1)} \exp \left[-\left(\frac{x}{a}\right)^b \right], \quad (8)$$

где a — параметр масштаба; b — параметр формы.

Функция распределения и плотность гамма распределения имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \gamma \left(k, \frac{y}{n} \right), \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(k) n^k} x^{k-1} e^{-\frac{x}{n}}, \quad (10)$$

где k — параметр формы; n — параметр масштаба; $\gamma \left(k, \frac{y}{n} \right)$ — неполная гамма-функция.

В рассматриваемом примере распределение Вейбулла используется с параметрами: $a = 1$,

$b = 2$. Тогда выражения (7) и (8) можно представить в виде

$$F(x) = 1 - e^{-x^2}, \quad (11)$$

$$f(x) = 2xe^{-x^2}. \quad (12)$$

Для гамма распределения используются параметры: $k = 2$, $n = 2$. Учитывая, что неполную гамма функцию можно будет представить в виде $\gamma(a+1, x) = a\gamma(a, x) - x^a e^{-x}$, то при параметрах $k = 2$, $n = 2$, можно записать $\gamma\left(1, \frac{y}{2}\right) = \frac{y}{2} M\left(1, 2, -\frac{y}{2}\right)$, где $M(\cdot)$ — функция Куммера [19].

Можно показать [19], что $M(1, 2, -2z) = \frac{e^z}{z} \operatorname{sh} z$, поэтому для $\gamma\left(1, \frac{y}{2}\right)$ следует:

$$\gamma\left(1, \frac{y}{2}\right) = 2e^{-\frac{y}{4}} \operatorname{sh}\left(\frac{y}{4}\right).$$

Тогда выражение (9) и (10) можно записать в виде

$$F(y) = 1 - e^{-\frac{y}{2}} \left(1 + \frac{y}{2}\right). \quad (13)$$

Следует отметить, что параметры распределений Вейбулла и гамма распределения выбраны таким образом, чтобы они имели коэффициент вариации больше единицы, что характерно для распределений с «тяжёлыми хвостами».

Совместная плотность распределений интервалов времени между пакетами и интервалов обработки пакетов

Зная законы распределения зависимых случайных величин X и Y , учитывая (4) и (5), можно определить совместную плотность распределения данных случайных величин.

В (6) будем использовать в качестве u и v функции распределений (11) и (13) и плотности распределений (12) и (14) вместо $f_X(x)$ и $f_Y(y)$. Тогда можем получить

$$f_{X,Y}(x, y) = \left(1 + \theta \left(1 - 2 \left(1 - e^{-x^2}\right)\right)\right) \times 1 - 2 \left(1 - e^{-\frac{y}{2} \left(1 + \frac{y}{2}\right)}\right) \left(2xe^{-x^2}\right) \cdot \left(\frac{y}{4} e^{-\frac{1}{2}y}\right)$$

Учитывая, что случайные величины X и Y зависимы, их совместную плотность можно представить в виде выражения

$$f_{X,Y}(y, y-x) = \left(1 + \theta \left(1 - 2 \left(1 - e^{-y^2}\right)\right)\right) \times \left(1 - 2 \left(1 - e^{-\frac{(x-y)}{2} \left(1 + \frac{(x-y)}{2}\right)}\right)\right) \times \left(2ye^{-y^2}\right) \cdot \left(\frac{(x-y)}{4} e^{-\frac{1}{2}(x-y)}\right). \quad (15)$$

Тогда выражение (3) для $f_T(x)$ примет вид

$$f_T(x) = \int_0^{\infty} \left(1 + \theta \left(1 - 2 \left(1 - e^{-y^2}\right)\right)\right) \times \left(1 - 2 \left(1 - e^{-\frac{(x-y)}{2} \left(1 + \frac{(x-y)}{2}\right)}\right)\right) \times \left(2ye^{-y^2}\right) \cdot \left(\frac{(x-y)}{4} e^{-\frac{1}{2}(x-y)}\right) dy. \quad (16)$$

Полученная формула для $f_T(x)$ позволяет оценить среднее время ожидания пакета в очереди и вариацию задержки пакета в очереди. Для записи выражения (16) в замкнутом виде необходимо вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} y^3 e^{(2x-1)y-y^2} dy. \quad (17)$$

Можно показать, что вычисление данного интеграла возможно с использованием следующего выражения [20]

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-\beta x - \gamma x^2} dx = (2\beta)^{-\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu) \exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right) D_{-\nu}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right),$$

при этом требуется определить $D_{-v}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right)$ — функцию параболического цилиндра. $D_m(\cdot)$ можно определить согласно следующему выражению из [21]

$$D_{-m-1}(z) = \sqrt{2} \frac{(-1)^m}{m!} e^{-\frac{z^2}{4}} \frac{dm}{dz^m} \left(e^{\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}_*(z) \right),$$

где $\operatorname{erfc}_*(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ — интеграл вероятности.

Используя аппроксимацию функции $\operatorname{erfc}_*(z)$, основанную на неравенстве $\operatorname{erfc}_*(z) < \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$, для значения интеграла

в (17) можно получить

$$\frac{1}{8} \left[(5 - 4x - 4x^2) - (1 - 2x)(7 - 4x - 4x^2) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right].$$

Среднее значение задержки определяется как

$$E[T] = \int_0^\infty x \cdot f_T(x) dx = 80 - 152 \cdot \theta. \quad (18)$$

Вариацию задержки можно определить согласно (1) в виде

$$\sigma(X) = \sqrt{A - (E[T])^2}, \quad (19)$$

где $A = \int_0^\infty x^2 f_T(x) dx$.

В итоге выражение для $\sigma(X)$ можно записать в виде

$$\sigma(X) = \sqrt{12 \cdot \theta^2 + 90 \cdot \theta - 8}.$$

Очевидно, что степень корреляции интервалов времени между пакетами и интервалов обработки пакетов в очереди, можно оценить через параметр копулы θ . Коэффициент корреляции Пирсона определяется по формуле:

$$R(XY) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}}, \quad (20)$$

где $E(X) = a \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)$ — математическое ожидание распределения Вейбулла интервалов времени между пакетами;

$\sigma_x^2 = a^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - a^2 \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{b}\right)$ — дисперсия

распределения Вейбулла; $E(Y) = k \theta$ — математическое ожидание гамма распределения интервалов обработки пакетов в очереди; $\sigma_y^2 = k \theta^2$ — дисперсия гамма распределения.

Математического ожидания двух случайных величин $E(XY)$ можно определить согласно выражению

$$E(XY) = \int_0^\infty \int_0^\infty xyf(x)f(y) dx dy + \\ + \theta \int_0^\infty \int_0^\infty xyf(x)f(y)[1 - 2F(x)] \times \\ \times [1 - 2F(y)] dx dy,$$

при этом $\int_0^\infty \int_0^\infty xyf(x)f(y) dx dy = E(X)E(Y)$.

В итоге выражение для $R(XY)$ примет окончательный вид

$$R(XY) = 0,09 \cdot \theta.$$

При $p = 2$ получим $(-0,045 \leq R < 0,045)$,

Зависимость задержки (формула (18)) и вариации задержки (формула (19)) от параметра копулы, следовательно, от коэффициента корреляции, показана на рис. 2 и рис. 3 соответственно.

Анализ графиков на рис. 2 и рис. 3 показывает, что задержка и вариация задержки растут с увеличением степени корреляции, что говорит о том, что степень корреляции имеет сильное влияние на параметры качества обслуживания трафика в инфокоммуникационных сетях. Этот факт следует учитывать при анализе параметров функционирования реальных систем обработки трафика.

Выводы

В работе представлены результаты анализа коррелированной очереди в системе W/G/1 при использовании распределений с «тяжелыми хвостами». Показано, что при наличии зависимостей интервалов времени между пакетами и временами обработки пакетов в очереди, для оценки параметров качества обработки эффективным является подход, основанный на использовании копул.

Для системы W/G/1 получена зависимость коэффициента корреляции Пирсона и параметр θ копулы Фарли — Гумбеля — Моргенштерна.

Получены значения среднего времени ожидания пакета в очереди и вариации задержки при наличии корреляций между интервалами времени между пакетами и длинами пакетов.

Приведены зависимости среднего времени ожидания пакета в очереди и вариации задержки от θ , анализ которых показывает, что задержка и вариация задержки возрастают с увеличением θ , а, следовательно, с увеличением степени корреляции в очереди. Полученные результаты указывают на необходимость учёта корреляций при анализе систем обработки трафика в инфокоммуникационных сетях.

Литература

1. Kleinrock L. Queueing Systems, Vol. I: Theory. New York: Wiley, 1975. 432 p.
2. Dbira H., Girard A., Sanso B. Calculation of packet jitter for non-poisson traffic // Annals of telecommunications. 2016. Vol. 71, Iss. 5–6. Pp. 223–237.
3. Kartashevskii V.G., Buranova, M.A. Analysis of Packet Jitter in Multiservice Network // 5th International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications Science and Technology, PIC S and T 2018 - Conference Proceedings. 2018. Pp. 797–802. DOI: 10.1109/INFOCOMMST.2018.8632085.
4. Карташевский В.Г., Буранова М.А. Моделирование джиттера пакетов при передаче по мультисервисной сети // Информационные технологии и телекоммуникации. 2019. Т. 17. № 1. С. 34–40.
5. Gang Uk Hwang, Khosrow Sohraby. Performance of correlated queues: the impact of correlated service and inter-arrival times // Performance Evaluation. 2004. No. 55. Pp. 129–145. DOI: 10.1016/S0166-5316(03)00102-0.
6. Cidon I., Guerin R., Khamisy A., Sidi M. Analysis of a correlated queue in a communication system // IEEE Trans. Inform. Theory. 1993. Vol. 39, Iss. 2. Pp. 456–465. DOI: 10.1109/18.212276
7. Cidon I., Guerin R., Khamisy A., Sidi M. On queues with interarrival times proportional to service times // Probability in the Engineering and Informational Sciences. January 1996. Vol. 10, Iss. 1. Pp. 87–107. DOI: 10.1017/S0269964800004198
8. Elwalid A.I., Mitra D., Stern T.E. Statistical multiplexing of Markov modulated sources: theory and computational algorithms // 13th International Teletraffic Congress, Copenhagen, 1991. Pp. 495–500.
9. Карташевский И.В., Волков А.Н., Куричек П.В. Анализ среднего времени задержки в си-

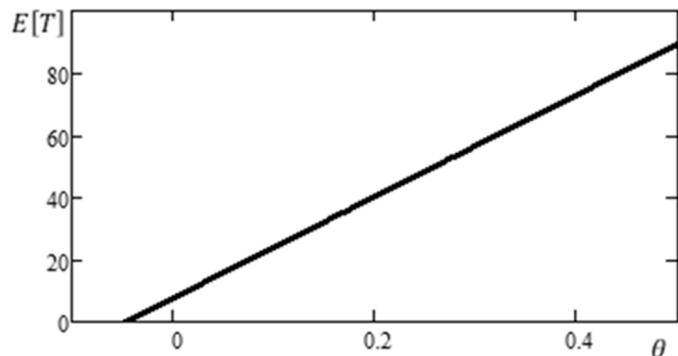


Рис. 2. График зависимости задержки от параметра копулы

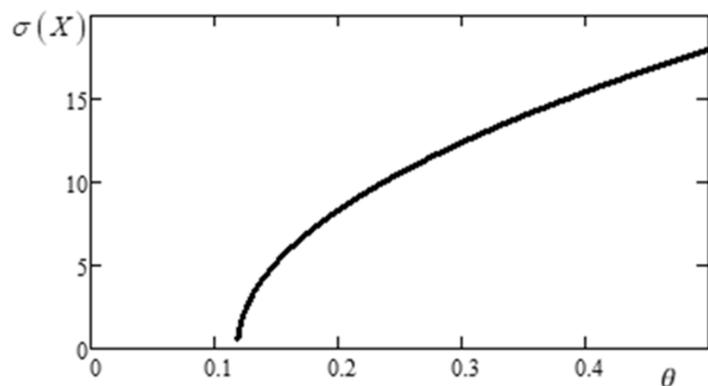


Рис. 3. График зависимости вариации задержки от параметра копулы

стеме массового обслуживания при обработке коррелированного трафика // Электросвязь. 2019. № 3. С. 41–50.

10. *Буранова М.А., Резяпкина М.И.* Анализ коррелированной очереди в системе G/G/1 // Инфокоммуникационные технологии. 2020. Т. 18. № 4. С. 417–427.

11. *Шелухин О.И., Осин А.В., Смольский С.М.* Самоподобие и фракталы // Телекоммуникационные приложения. М.: Физматлит, 2008. 368 с.

12. *Kartashevskiy I., Buranova M.* Calculation of Packet Jitter for Correlated Traffic // International Conference on «InInternet of Things, Smart Spaces, and Next Generation Networks and Systems. NEW2AN 2019». 2019. Vol. 11660. Pp. 610–620. DOI: 10.1007/978-3-030-30859-9_53

13. *Карташевский И.В.* Использование копул в статистическом анализе телекоммуникационного трафика // Инфокоммуникационные технологии. 2016. Т. 14. № 4. С. 405–412.

14. *Farlie, D.G.J.* The performance of some correlation coefficients for a general bivariate distribution // *Biometrika*. 1960. No. 47. Pp. 307–323.

Поступила 12 июля 2021 г.

15. *Фантазини Д.* Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций // Прикладная эконометрика. 2011. №3 (23). С. 98–132.

16. *Gumbel, E.J.* Bivariate exponential distributions // *Journal of the American Statistical Association*. 1960. № 55. Pp. 698–707. DOI:10.2307/2281591

17. *Morgenstern D.* Einfache Beispiele zweidimensionaler Verteilungen // *Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik*. 1956. No. 8. Pp. 234–235.

18. *Пеникас Г.И.* Модели «копула» в приложениях к задачам финансов // Журнал новой экономической ассоциации. 2010. № 7 (7). С. 24–44.

19. *Абрамовиц М.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.

20. *Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

21. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Том 2. М.: Наука, 1974. 296 с.

English

EVALUATION OF SERVICE QUALITY PARAMETERS IN W/G/1 CORRELATED QUEUE SYSTEM

Marina Anatolyevna Buranova — PhD, Head of the department of the organization of the educational process, Associate Professor of Information Security Department, in Technical Sciences.

E-mail: plaffy.cs@gmail.com

Address: 443010, Russian Federation, Samara, L. Tolstoy Street, 23.

Abstract: QoS evaluation (Quality of Service), such as delay, packet jitter variation, packet loss probability is one of the most pressing tasks in designing and predicting the operation of infocommunication networks. At the same time in the furtherance of this goal problems arise concerning features of streams being processed in infocommunication networks: difference from the simplest ones, available self-similarity properties, correlations within and between time sequences of maintained packets. That said, most of analytical works on infocommunication networks and their operation parameters evaluation are based on the assumption of streams' independence. The article presents a queuing model that enables to consider cross-correlation of time intervals between packets and processing intervals of packets in queue. Analysis of correlated queue in G/G/1 type system is given based on the above model. Weibulla distribution is regarded as an example of randomization of time intervals between packets and gamma distribution as packets' processing intervals. Values were obtained for delay and queue delay variation estimates if time intervals' correlations are available between packets and packets' processing intervals. Copula theory is used for the task in operation. There is analysis given of time intervals' cross-correlation between packets and packets processing intervals, which results in revealing dependence between Pearson correlation coefficient and Farley — Gumbel — Morgenstern copula parameter. There is also analysis given of behavior for delay and delay variation depending on copula parameter, and, therefore, on degree of correlation in queue. The attained results highlight the need to consider correlations in analyzing traffic-processing systems in infocommunication networks.

Keywords: correlation, copulas, quality of service, delay, delay variation.

References

1. *Kleinrock L.* Queueing Systems, Vol. I: Theory. New York: Wiley, 1975. 432 p.
2. *Dbira H., Girard A., Sanso B.* Calculation of packet jitter for non-poisson traffic. *Annals of telecommunications*. 2016. Vol. 71, Iss. 5–6. Pp. 223–237.

3. *Kartashevskii V.G., Buranova, M.A.* Analysis of Packet Jitter in Multiservice Network. 5th International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications Science and Technology, PIC S and T 2018 - Conference Proceedings. 2018. Pp. 797–802. DOI: 10.1109/INFOCOMMST.2018.8632085.
4. *Kartashevskiy V. G., Buranova M. A.* Modeling of packet jitter during transmission over a multi-service network. *Informacionnye tekhnologii i telekommunikacii*. 2019. Vol. 17. No. 1. Pp. 34–40.
5. *Gang Uk Hwang, Khosrow Sohraby.* Performance of correlated queues: the impact of correlated service and inter-arrival times // *Performance Evaluation*. 2004. No. 55. Pp. 129–145. DOI: 10.1016/S0166-5316(03)00102-0.
6. *Cidon I., Guerin R., Khamisy A., Sidi M.* Analysis of a correlated queue in a communication system. *IEEE Trans. Inform. Theory*. 1993. Vol. 39, Iss. 2. Pp. 456–465. DOI: 10.1109/18.212276
7. *Cidon I., Guerin R., Khamisy A., Sidi M.* On queues with interarrival times proportional to service times. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. January 1996. Vol. 10, Iss. 1. Pp. 87–107. DOI: 10.1017/S0269964800004198
8. *Elwalid A.I., Mitra D., Stern T.E.* Statistical multiplexing of Markov modulated sources: theory and computational algorithms 13th International Teletraffic Congress, Copenhagen, 1991. Pp. 495–500.
9. *Kartashevskiy I.V., Volkov A.N., Kirichek R.V.* Analysis of the average delay time in the queuing system when processing correlated traffic. *Elektrosvyaz'*. 2019. No. 3. Pp. 41–50.
10. *Buranova M.A., Rezyapkina M.I.* Analysis of the correlated queue in the G/G/1 system. *Infokommunikacionnye tekhnologii*. 2020. Vol. 18. No. 4. Pp. 417–427.
11. *Shelukhin O.I., Osin A.V., Smolsky S.M.* Self-similarity and fractals. *Telecommunications applications*. Moscow: Fizmatlit, 2008. 368 p.
12. *Kartashevskiy I., Buranova M.* Calculation of Packet Jitter for Correlated Traffic // *International Conference on «Internet of Things, Smart Spaces, and Next Generation Networks and Systems. NEW2AN 2019»*. 2019. Vol. 11660. Pp. 610–620. DOI: 10.1007/978-3-030-30859-9_53
13. *Kartashevskiy I.V.* The use of copulas in the statistical analysis of telecommunications traffic. *Infokommunikacionnye tekhnologii*. 2016. Vol. 14. No. 4. Pp. 405–412.
14. *Farlie D.G.J.* The performance of some correlation coefficients for a general bivariate distribution. *Biometrika*. 1960. No. 47. Pp. 307–323.
15. *Fantazzini D.* Modeling of multidimensional distributions using copula functions. *Prikladnaya Ekonomika*. 2011. No. 3 (23). Pp. 98–132.
16. *Gumbel, E.J.* Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*. 1960. No. 55. Pp. 698–707. DOI:10.2307/2281591
17. *Morgenstern D.* Einfache Beispiele zweidimensionaler Verteilungen. *Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik*. 1956. No. 8. Pp. 234–235.
18. *Penikas G.I.* Models of "copula" in the appendix to the problems of finance. *Zhurnal novoj ekonomicheskoy asociacii*. 2010. No. 7 (7). Pp. 24–44.
19. *Abramovits M.* Handbook of special functions. Moscow: Nauka, 1979. 832 p.
20. *Gradshteyn I.S.* Tables of integrals, sums, series and products. Moscow: Nauka, 1971. 1108 p.
21. *Bateman G., Erdel A.* Higher transcendental functions. Vol. 2. Moscow: Nauka, 1974. 296 p.