

## Системы, сети и устройства телекоммуникаций

DOI 10.66032/2221-2574-2021-1-3-33-39

УДК 621.396

### СРАВНЕНИЕ ВИНЕРОВСКОГО И КАЛМАНОВСКОГО РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ АДАПТАЦИИ АНТЕННЫХ РЕШЁТОК

**Афанасьев Никита Андреевич**

инженер кафедры радиосистем и обработки сигналов Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича<sup>1</sup>.

*E-mail:* [plaffy.cs@gmail.com](mailto:plaffy.cs@gmail.com)

**Глушанков Евгений Иванович**

доктор технических наук, профессор, профессор кафедры радиосистем и обработки сигналов Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича<sup>1</sup>.

*E-mail:* [glushankov57@gmail.com](mailto:glushankov57@gmail.com)

**Кирик Дмитрий Игоревич**

кандидат технических наук, доцент, декан факультета радиотехнологий связи Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича<sup>1</sup>.

*E-mail:* [d\\_i\\_kirik@mail.ru](mailto:d_i_kirik@mail.ru)

**Рылов Евгений Александрович**

генеральный директор АО «ПКБ «РИО»<sup>2</sup>.

*E-mail:* [rylov79@mail.ru](mailto:rylov79@mail.ru)

<sup>1</sup>Адрес: 193232, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, пр. Большевиков д. 22, корп. 1.

<sup>2</sup>Адрес: 199155, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Уральская ул., д. 19, корп. 9Ж.

**Аннотация:** Проведено сравнение оптимального для стационарной ситуации винеровского решения для адаптации антенной решётки с модифицированным калмановским фильтром. Показано, что эти фильтры приводят к одинаковому решению в стационарных ситуациях, но при нестационарных изменениях только модифицированный фильтр Калмана позволяет получать оптимальное решение. Проанализирована чувствительность алгоритма линейной калмановской фильтрации к отклонениям параметров модели, на основе результатов которой предложен робастный фильтр для реализации алгоритма адаптации антенной решётки.

**Ключевые слова:** адаптивная антенна, MATLAB, фильтр Винера, фильтр Калмана, диаграмма направленности, чувствительность.

В задачах адаптивной обработки сигналов в антенных решётках (АР) осуществляется поиск оптимального или близкого по тому или иному критерию к оптимальному вектора весовых коэффициентов (ВВК) АР, однозначно определяющего ее диаграмму направленности. При использовании критерия максимума отношения мощности сигнала к суммарной мощности помех и шума, оптимальный ВВК находится из

уравнения Винера-Хопфа [1–4] вида

$$W = R_{pp}^{(-1)} S, \quad (1)$$

где  $W^T = [w_1, w_2, \dots, w_L]$  — ВВК АР;  $L$  — число антенных элементов (АЭ) АР;  $R_{pp}^{(-1)}$  —  $(L \times L)$ -мерная корреляционная матрица (КМ) помех;  $S^T = [s_1, s_2, \dots, s_L]$  — вектор, характеризующий направление прихода (волновой фронт) полезного сигнала, который может

быть для линейной АР задан следующим образом:

$$S = s_n S_\theta, S_\theta^T = [s_{1\theta}, s_{2\theta}, \dots, s_{L\theta}], \quad (2)$$

$$S_{i\theta} = \exp\left\{-j \frac{2\pi\lambda}{d} \sin \theta\right\}, \quad (3)$$

где  $\lambda$  — длина волны;  $d$  — расстояние между АЭ;  $\theta$  — угол прихода сигнала.

Решение (1)–(3) позволяет найти оптимальное значение ДН АР при известных априорных данных — значении матрицы  $R_{pp}$  и угле прихода полезного сигнала —  $\theta$ . Результаты анализа эффективности винеровского решения представлены на рис. 1.

В то же время в реальных условиях функционирования АР значения  $R_{pp}$  и  $\theta$  могут быть априорно неизвестны и оцениваться в процессе функционирования. Так, оценка КМ находится из выражения

$$\hat{R}_{pp} = \sum_{n=1}^N P(n)P^T(n), \quad (4)$$

где  $P(n)$  —  $L$ -элементный вектор помех на выходе АЭ АР в  $n$ -й момент времени. При этом реальное значение угла прихода полезного сигнала может отличаться от заданного  $\theta$ . Кроме того, оценка КМ, определённая в соответствии с (4), может быть вырожденной или плохо обусловленной, что затрудняет использование винеровского решения на практике [2, 5, 6]. Также решения (1)–(4) справедливы лишь для стационарных сигнально-помеховых ситуаций.

В нестационарных случаях вместо стационарного винеровского решения целесообразно использовать нестационарные фильтры. К подобным в линейном случае относится фильтр Калмана, который применяется для адаптации АР в гауссовом приближении [7, 8]. При этом задачу поиска оптимального ВВК можно сформулировать как задачу оценивания ВВК. В этом случае модель изменения ВВК можно записать в виде следующего стохастического дифференциального уравнения (СДУ) состояния:

$$\frac{dW(t)}{dt} = F(t)W(t) + V_w(t), \quad (5)$$

где  $F(t)$  — известная  $(L \times L)$ -мерная матрица;  $V_w(t)$  —  $L$ -мерный вектор белых порождающих шумов. СДУ (5) задает изменение во времени нестационарного случайного ВВК. Модель наблюдения для измерения процесса можно представить, как

$$z(t) = X^T(t)W(t) + v_z(t), \quad (6)$$

где  $v_z(t)$  — белый шум наблюдения, характеризующий погрешности и тепловые шумы;  $X(t)$  —  $L$ -мерный вектор сигналов и помех на выходе АЭ АР.

Представив уравнения состояния и наблюдения в форме (5)–(6) и воспользовавшись методом калмановской фильтрации в непрерывном времени [9], получим следующие модифицированные уравнения для оценивания текущего значения ВВК при нестационарной сигнально-помеховой ситуации:

$$\frac{d\hat{W}(t)}{dt} = F(t)\hat{w}(t) + K(t)[z(t) - X^T(t)\hat{W}(t)], \quad (7)$$

$$K(t) = P_{\hat{w}}(t) \frac{X(t)}{q_z(t)}, \quad (8)$$

$$\frac{dP_{\hat{w}}(t)}{dt} = F(t)P_{\hat{w}}(t) + P_{\hat{w}}(t)F^T(t) - \frac{(P_{\hat{w}}(t)X(t)X^T(t)P_{\hat{w}}(t))}{q_z(t)} + Q_{\hat{w}(t)}, \quad (9)$$

где  $\hat{W}(t)$  — оценка ВВК  $W(t)$ ;  $K(t)$  —  $L$ -мерный векторный коэффициент усиления фильтра;  $q_z(t)$  — спектральная плотность мощности шума  $v_z(t)$ ;  $\text{cov}[v_z(t), v_z(\tau)] = q_z(t)\delta(t - \tau)$ ;  $\delta(t - \tau)$  — дельта-функция;  $P_{\hat{w}}(t)$  —  $(L \times L)$ -мерная матрица дисперсии ошибки;  $Q_{\hat{w}(t)}$  —  $(L \times L)$ -мерная матрица спектральной плотности мощности шума  $V_w(t)$

$$\text{cov}[V_w(t), V_w(\tau)] = Q_w(t)\delta(t - \tau)$$

$\tilde{W}(t) = W(t) - \hat{W}(t)$  — ошибка оценивания при начальных условиях

$$\tilde{W}(0) = E[W(0)] = \mu_w(0),$$

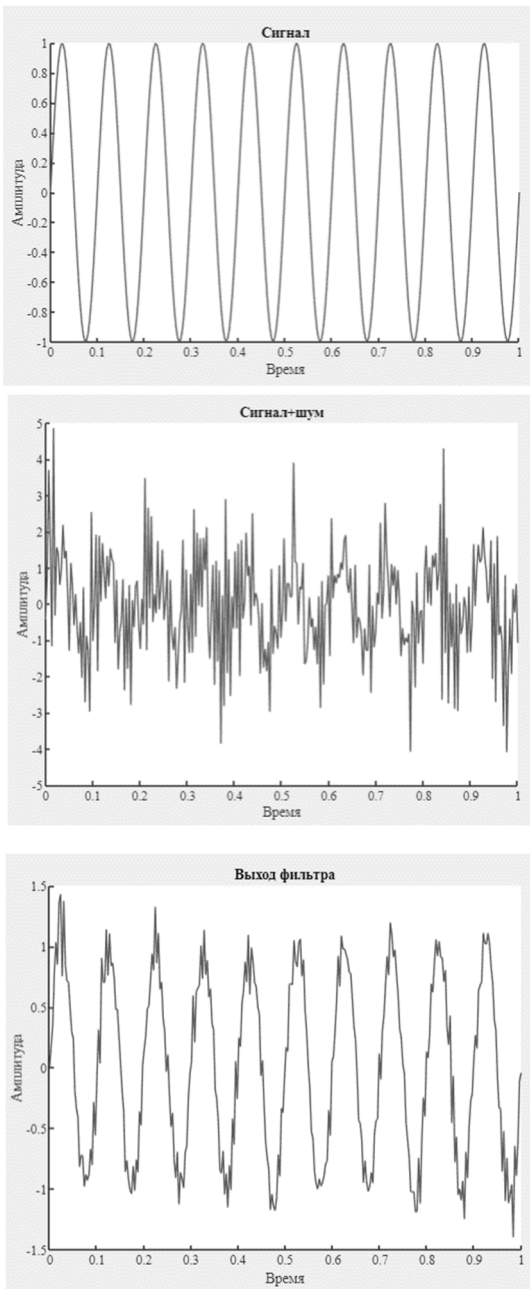


Рис. 1. Фильтр Винера

$$P_w(0) = \text{var}[W(0)] = P_w(0),$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Для цифровой реализации перейдем от непрерывного к дискретному времени следующим образом. Выбирая интервал дискретизации  $\Delta t$  из теоремы Котельникова вместо (5)–(6) получим уравнения состояния и наблюдения в виде

$$\frac{\Delta W(k)}{\Delta t} = F(k)W(k) + V_w(k),$$

$$W(k+1) - W(k) = \Delta t F(k)W(k) + \Delta t V_w(k).$$

Тогда

$$W(k+1) = [I + \Delta t F(k)]W(k) + \Delta t V_w(k),$$

где  $I$  — единичная матрица.

Окончательно запишем, обозначив  $\Phi_k = I + \Delta t F(k)$ , уравнения состояния и наблюдения

$$W(k+1) = \Phi(k)W(k) + \Delta t V_w(k), \quad (10)$$

$$z(k) = X^T(k)W(k) + \Delta t V_z(k), \quad (11)$$

причём  $\|\Phi(k)\| < 1$ .

Тогда модифицированный фильтр Калмана (7)–(9) в дискретном времени с учётом уравнений (10)–(11) запишем следующим образом:

$$\hat{W}(k+1) = \Phi(k)\hat{W}(k) + K(k+1) \times [z(k+1) - X^T(k)\Phi(k)\hat{W}(k)], \quad (12)$$

$$K(k) = P_w(k-1)X(k) \times [X^T(k)P_w(k-1)X(k) + q_z(k)]^{-1}, \quad (13)$$

$$P_w(k) = \Phi(k)[I + K(k)X^T(k)P_w(k-1) \times \Phi^T(k) + \Delta t^2 Q_w(k)] \quad (14)$$

при начальных условиях, аналогичных непрерывному случаю, и

$$\text{cov}[v_z(j), v_z(k)] = q_z(j)\delta_k(j-k),$$

$$\text{cov}[v_w(j), v_w(k)] = Q_w(j)\delta_k(j-1),$$

где  $\delta_k(j-k)$  — символ Кронекера,

$$\delta_k(j-k) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Для моделирования винеровского и калмановского решений были разработаны программы в среде MATLAB, с помощью которых была проанализирована эффективность вычисления ВВК в соответствии с (12)–(14) в сравнении, для стационарных случаев, с (1).

Результаты анализа представлены на рис. 1 (фильтр Винера) и рис. 2 (фильтр Калмана). Из результатов видно, что в стационарных сигнально-помеховых ситуациях алгоритмы практически идентичны друг другу.

В реальных ситуациях функционирования АР параметры модели (10)–(11) известны приближенно. Проанализируем отклонения параметров моделей от реальных значений и их влияние на точность фильтрации (чувствительность фильтра к отклонению параметров модели). Пусть вид моделей сохраняется прежним и реальные значения записываются, как и ранее, в форме уравнений (10)–(11) с параметрами  $\mu_w(0), P_w(0), Q_w(k), q_z(k)$ , а соответствующие параметры, взятые за основу при синтезе фильтров, описываются уравнением состояния

$$\bar{W}(k) = \bar{\Phi}(k-1)\bar{W}(k-1) + \Delta t V_w(k-1) \quad (15)$$

и уравнением наблюдения

$$\bar{z}(k) = X^T(k)\bar{W}(k) + v_z(k) \quad (16)$$

с параметрами  $\bar{\mu}_w(0), \bar{P}_w(0), \bar{Q}_w(k), \bar{q}_w(k)$ .

Тогда алгоритм фильтрации примет вид:

$$\begin{aligned} \hat{W}(k) &= \bar{\Phi}(k-1)\hat{W}(k-1) + \bar{K}(k) \times \\ &\times [\bar{z}(k) - X^T(k)\bar{\Phi}(k-1)\hat{W}(k-1)]; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}(k) &= (P_w(k)x(k)[X^T(k)\bar{P}_w(k) \times \\ &\times x(k) + \bar{q}_z(k)]^{-1}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_w(k) &= \bar{\Phi}(k)[I - \bar{K}(k)X^T(k)\bar{Q}_w(k)] \times \\ &\times \bar{\Phi}(k) + \Delta t^2 \bar{Q}_w(k). \end{aligned} \quad (19)$$

Исходя из (10)–(14) и (15)–(19) можно вычислить ошибки фильтрации:

$$\tilde{W}(k) = W(k) - \hat{W}(k), \quad (20)$$

$$\Delta\Phi(k) = \Phi(k) - \bar{\Phi}(k). \quad (21)$$

Получив ошибки в форме (20)–(21) можно найти ковариационную матрицу ошибок фильтрации

$$\begin{aligned} P_w(k) &= [I - \bar{K}(k)X^T(k)]\{\Delta\Phi(k)P_w(k-1) \times \\ &\times \Delta\Phi^T(k) + \bar{\Phi}(k-1)P_w(k-1)\bar{\Phi}^T(k) + \\ &+ \Delta\Phi(k-1)V_c(k-1)\bar{\Phi}(k-1) + \\ &+ \bar{\Phi}(k-1)V_c^T(k-1)\Delta\Phi(k-1) + \\ &+ \Delta t^2 Q_w(k)\}[I - \bar{K}(k)X^T(k)]^T + \\ &+ q_z(k)\bar{K}(k)\bar{K}^T(k), \end{aligned} \quad (22)$$

в которой

$$V_c(k) = [\Phi(k-1)V_c(k-1) \times$$

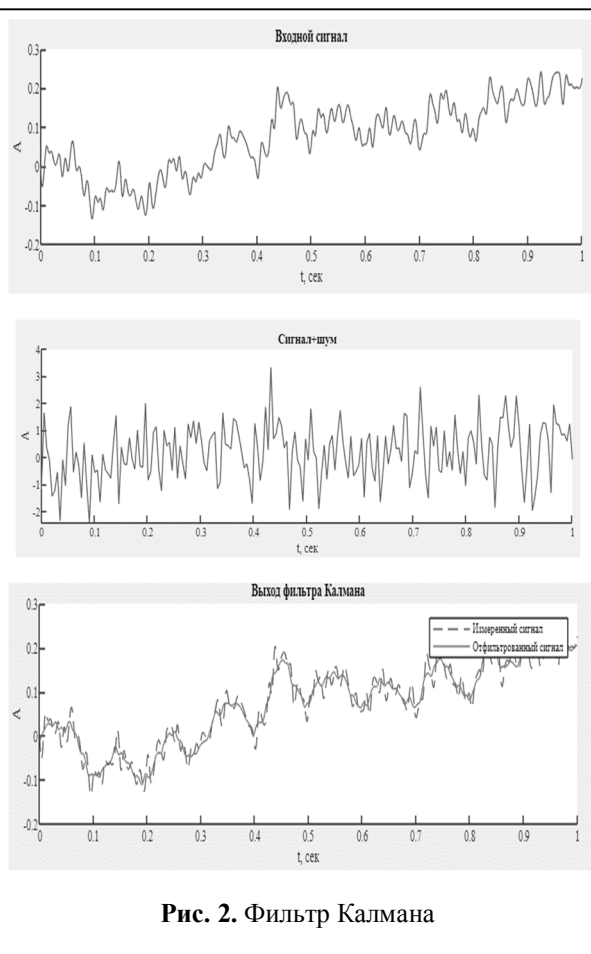


Рис. 2. Фильтр Калмана

$$\begin{aligned} &\times \Delta\Phi^T(k-1) + \Phi(k-1)V_c(k-1) \times \\ &\times \Phi^T(k-1) + \Delta t^2 Q_w(k)[I - \bar{K}(k)X^T(k)]^T. \end{aligned} \quad (23)$$

Результаты анализа чувствительности фильтра (17)–(19) с учётом (20)–(23) представлены на рис. 3 при отклонениях  $\Delta\Phi$  из (21), рис. 4 — при отклонениях  $\bar{Q}_w(k)$  от  $Q_w(k)$  — в виде

$$\Delta Q_w(k) = Q_w(k) - \bar{Q}_w(k),$$

и на рис 5 — при отклонении  $\bar{q}_z(k)$  от  $q_z(k)$  — в виде

$$\Delta q_z = q_z(k) - \bar{q}_z(k).$$

Из рисунков видно, что при отклонениях параметров эффективность фильтрации ухудшается, особенно при отклонении в сторону уменьшения от реальных значений спектральных плотностей мощности шумов.

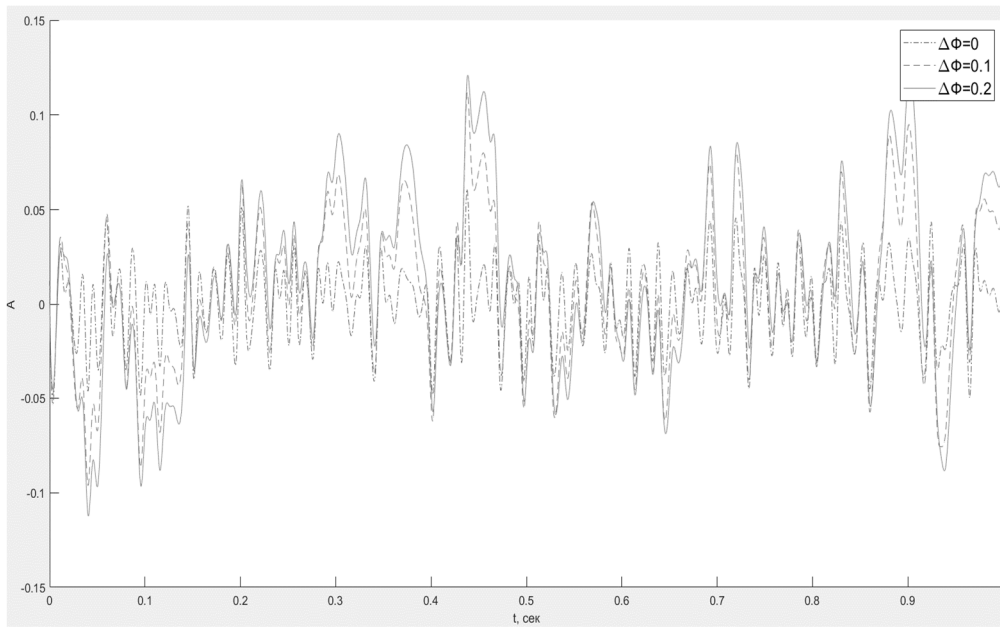


Рис. 3. Отклонения  $\Delta\Phi$

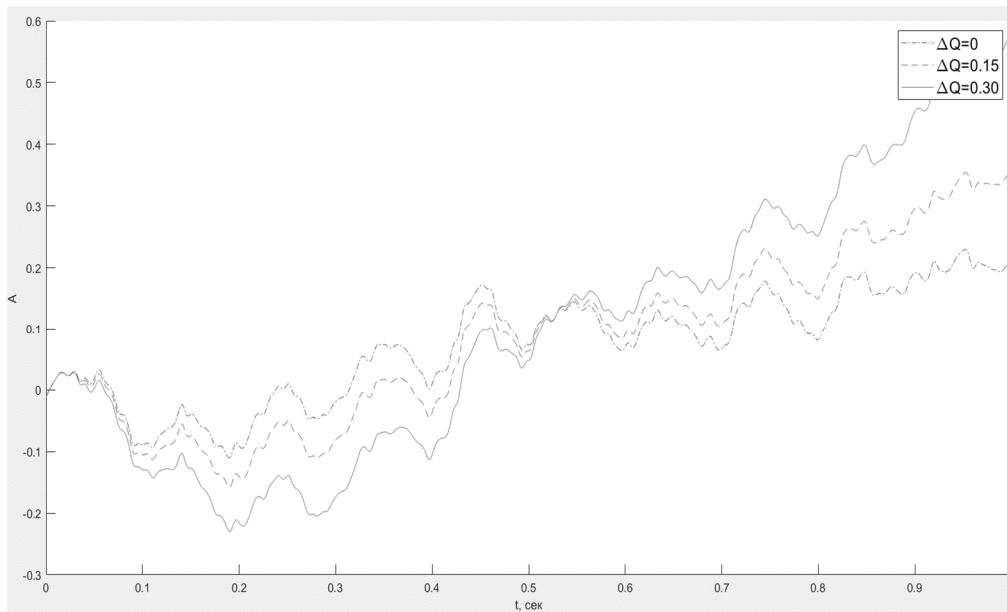


Рис. 4. Отклонения  $\bar{Q}_{\hat{W}}(k)$  от  $Q_W(k)$

На основе полученных результатов можно предложить использование робастного фильтра Калмана, в котором значения спектральной плотности мощностей шумов выбираются из максимально возможных значений диапазона изменения (аналогично, как в [10] при решении задач обнаружения сигнала и коррекции канала в непрерывном времени), а матрицу

$F(k)$  в уравнении состояния выбирать единичной. Тогда матрица  $\Phi(k)$  в (11) будет равна

$$\Phi(k) = (1 + \Delta t)I,$$

а уравнения фильтрации примут вид

$$\hat{W}(k+1) = (1 + \Delta t)\hat{W}(k) + K(k+1) \times \\ \times [z(k+1) - (1 + \Delta t)X^T(k)\hat{W}(k)],$$

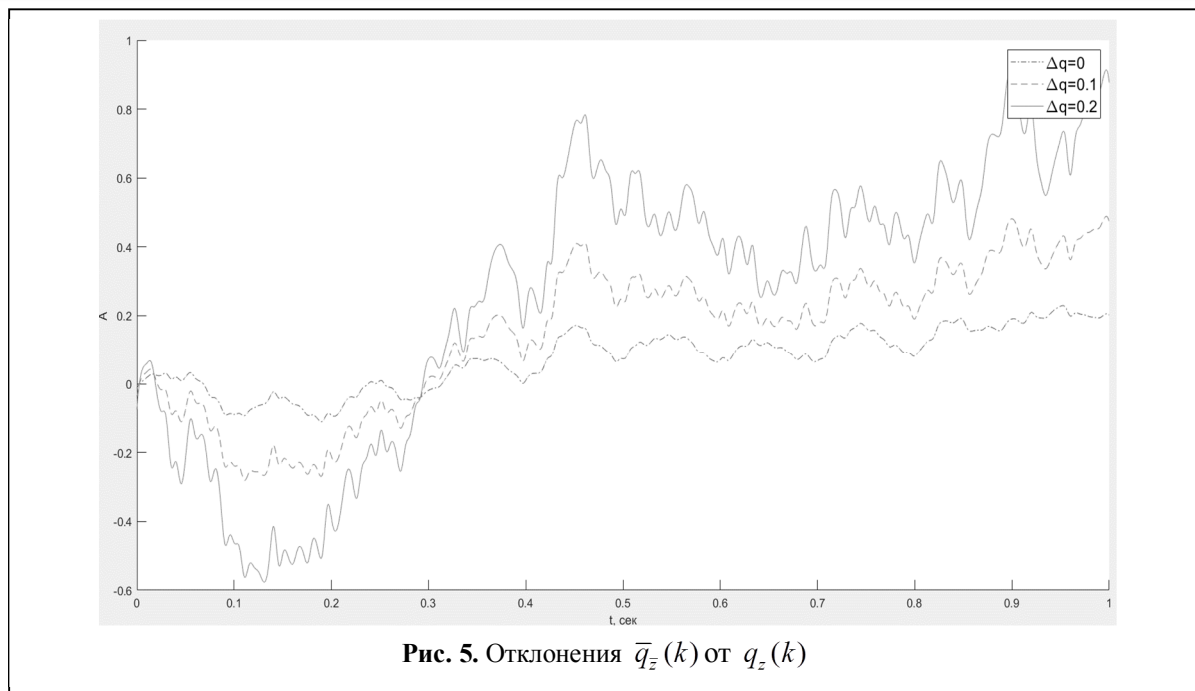


Рис. 5. Отклонения  $\bar{q}_z(k)$  от  $q_z(k)$

$$K(k) = P_w(k-1)X(k)[X^T(k)P_w(k-1) \times X(k) + q_z^{\max}(k)]^{-1},$$

$$P_w(k) = (1 + \Delta t)[I + K(k)X^T(k) \times P_w(k-1)(1 + \Delta t) + \Delta t^2 Q_w^{\max}(k),$$

где  $q_z^{\max}(k)$ ,  $Q_w^{\max}(k)$  — максимальные значения из диапазона измерения  $q_z(k)$  и  $Q_w(k)$  соответственно.

Результаты анализа предложенной модификации робастного фильтра в задачах адаптации АР показывают его достаточно высокую эффективность и скорость сходимости, что даёт возможность его использования в нестационарных сигнально-помеховых ситуациях.

#### Литература

1. Монзинго Р.А., Миллер Т.У. Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию. М.: Радио и связь, 1986. 448 с.
2. Журавлев А.К., Хлебников В.А., Родимов А.П. и др. Адаптивные радиотехнические системы с антенными решетками. Л.: ЛГУ, 1991. 544 с.
3. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1989. 40 с.

Поступила 21 июля 2021 г.

4. Пистолькорс А.А., Литвинов О.С. Введение в теорию адаптивных антенн. М.: Наука, 1991. 200 с.

5. Глушанков Е.И., Колесников А.Н., Мотков В.И., Родимов В.А. Аппроксимация выборочных корреляционных матриц матрицами специального вида в задачах адаптации центрально-симметричных антенных решеток // В сб.: Пространственно-временная обработка сигналов в системах радиосвязи. Приложение к журналу «Радиотехника», 1992. С. 41–52.

6. Журавлев А.К., Лукошкин А.П., Поддубный С.С. Обработка сигналов в адаптивных антенных решетках. Л.: ЛГУ, 1983. 240 с.

7. Родимов А.П., Поповский В.В. Статистическая теория поляризационно-временной обработки сигналов и помех. М.: Радио и связь, 1984. 272 с.

8. Ongond P., Hema Singh. Constrained Kalman Filter based Interference Suppression in Phased Arrays// IEEE International Microwave and RF Conference (IMaRC), 2014, p. 286 – 289.

9. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976. 496 с.

10. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 2014. 608 с.

English

## COMPARISON OF WIENER AND KALMAN SOLUTIONS FOR ANTENNA ARRAY ADAPTATION

**Nikita Andryevich Afanasyev** — Engineer, Department of Radio Systems and Signal Processing, The Bonch-Bruевич Saint Petersburg State University of Telecommunications<sup>1</sup>.

*E-mail:* [plaffy.cs@gmail.com](mailto:plaffy.cs@gmail.com)

**Evgeny Ivanovich Glushankov** — Grand Dr. in Engineering, Professor, Department of Radio Systems and Signal Processing, The Bonch-Bruевич Saint Petersburg State University of Telecommunications<sup>1</sup>.

*E-mail:* [glushankov57@gmail.com](mailto:glushankov57@gmail.com)

**Dmitry Igorevich Kirik** — PhD, Associate Professor, Dean, Faculty of Radio Technologies of Communication, The Bonch-Bruевич Saint Petersburg State University of Telecommunications<sup>1</sup>.

*E-mail:* [d\\_i\\_kirik@mail.ru](mailto:d_i_kirik@mail.ru)

**Evgeny Aleksandrovich Rylov** — General Director, JSC Design Bureau "RIO"<sup>2</sup>.

*E-mail:* [rylov79@mail.ru](mailto:rylov79@mail.ru)

<sup>1</sup>*Address:* 193232, Russian Federation, St. Petersburg, Bolshevikov Ave., 22/1.

<sup>2</sup>*Address:* 199155, Russian Federation, St. Petersburg, Uralskaya str., 19, bldg. 9G.

*Abstract:* Comparison of Wiener solution optimal for a steady state situation for adapting antenna array with a modified Kalman filter was performed. That said a linear (as per Gaussian approximation) state change model of weight factors for antenna array as state and observation equations was obtained for Kalman filter. It is made clear that these filters bring about the same solution in steady state situations but only a modified Kalman filter enables to get optimal solution in case of nonsteady state changes. At the same time, when solving practical problems in real-life situations of radio-engineering systems' operation, the parameters of state and observation models for describing weight vector for antenna array are either unknown or known with some errors. Therefore, the sensitivity of linear Kalman filtering algorithm was analyzed in regard to deviations of model's main parameters that most affect the filtering accuracy, namely, state matrix and noise-power spectral density of state and observation. That said the type of models remains unchanged. It is demonstrated that such deviations deteriorate filtering. The filter is particularly sensitive to a priori uncertainty in setting noise-power spectral density in change model of weight vector. Robust filter is proposed for implementing an adapting algorithm for the antenna array based on the results of sensitivity analysis. Robust filter structure is based on choosing noise-power spectral density proceeding from its maximum values in the parametric variation range of weight vector model represented by equations of state and observation.

*Keywords:* adaptive antenna, MATLAB, Wiener filter, Kalman filter, radiation pattern, sensitivity.

### References

1. Monzingo R.A., Miller T.U. Adaptive antenna lattices: Introduction to the theory. Moscow: Radio i svyaz', 1986. 448 p.
2. Zhuravlev A.K., Khlebnikov V.A., Rodimov A.P., etc. Adaptive radio engineering systems with antenna arrays. Leningrad: LSU, 1991. 544 p.
3. Widrow B., Stirns S. Adaptive signal processing. Moscow: Radio i svyaz', 1989. 40 p.
4. Pistolkors A.A., Litvinov O.S. Introduction to the theory of adaptive antennas. Moscow: Nauka, 1991. 200 p.
5. Glushankov E.I., Kolesnikov A.N., Motkov V.I., Rodimov V.A. Approximation of sample correlation matrices by special-type matrices in problems of adaptation of centrally symmetric antenna arrays // In Space-time signal processing in radio communication systems. Appendix to the journal "Radiotekhnika", 1992. Pp. 41–52.
6. Zhuravlev A.K., Lukoshkin A.P., Poddubny S.S. Signal processing in adaptive antenna arrays. Leningrad: LSU, 1983. 240 p.
7. Rodimov A.P., Popovsky V.V. Statistical theory of polarization-time processing of signals and interference. Moscow: Radio i svyaz', 1984. 272 p.
8. Omgond P., Hema Singh. Constrained Kalman Filter based Interference Suppression in Phased Arrays // IEEE International Microwave and RF Conference (IMaRC), 2014. Pp. 286–289.
9. Sage E., Mels J. The theory of evaluation and its application in communication and management. Moscow: Svyaz, 1976. 496 p.
10. Tikhonov V.I., Kharisov V.N. Statistical analysis and synthesis of radio engineering devices and systems. Moscow: Radio i svyaz', 2014. 608 p.