

УДК 621.371

**ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛИНОМОВ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ В ЦОС****Жиганов Сергей Николаевич**

кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Радиотехника» Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых»¹.

Михеев Кирилл Валерьевич

кандидат технических наук, ведущий инженер АО «Муромский завод радиоизмерительных приборов»².

Жиганова Елена Александровна

кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Радиотехника» Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых»¹.

Ракитин Алексей Валерьевич

кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Радиотехника» Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых»¹.

E-mail: s_zh_72@mail.ru.

¹Адрес: 602264, Российская Федерация, Владимирская обл., г. Муром, ул. Орловская, д. 23.

²Адрес: 602267, Российская Федерация, Владимирская обл., г. Муром, Карачаровское шоссе, д. 2.

Аннотация: Один из основных методов представления функциональных зависимостей в современных вычислительных устройствах основан на применении различных полиномов различных степеней. В работе получены коэффициенты полиномиальной функции до 9 степени, использующие многочлены Чебышева первого и второго рода, многочлены Лежандра, Гегенбауэра и Якоби. Рассчитаны значения максимальных отклонений аппроксимирующей функции от аппроксимируемой на интервале значений на примере функции вычисления квадратного корня, а так же рассчитаны значения площади ошибок.

Ключевые слова: Полиномиальные функции, многочлены Лежандра, Чебышева первого и второго рода, Гегенбауэра и Якоби.

Введение

Современные цифровые процессоры реализуют на аппаратном уровне только простые арифметические и логические операции, и для вычисления более сложных функций, таких как $\sin x$, $\log x$, \sqrt{x} и т.д., используются различные методы и вычислительные алгоритмы аппроксимации. Применительно к вычислительной технике, эти выражения должны состоять (непосредственно или в своем разложении) из понятных процессору элементарных арифметических операций.

При воспроизведении функциональных зависимостей широкое применение нашёл полиномиальный метод аппроксимации, кото-

рый используется во многих научных и прикладных технических задачах: от приближения стандартных математических функций в современных специализированных микропроцессорах до реализации градуировочных характеристик при воспроизведении рабочих эталонов, калибровке датчиков и измерительных систем. Так, например, трудоёмкие операции получения эталонных значений априорно неизвестных функциональных зависимостей чаще всего завершаются аппроксимацией с заданной точностью полиномами различной степени [1–5]. Повсеместное распространение полиномиального метода обусловлено его простотой, наглядной геометрической интерпретацией, а главное – низкими

Таблица 1. Ортогональные многочлены

Название многочлена	Весовая функция $\omega(x)$
Чебышева I рода	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Чебышева II рода	$\sqrt{1-x^2}$
Лежандра	1
Гегенбауэра	$(1-x^2)^{\lambda-1/2}$
Якоби	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$

вычислительными затратами при расчёте значений функции $f(x)$ с помощью полинома вида

$$\varphi_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k, \quad (1)$$

где a_0, a_1, \dots, a_n – некоторые константы.

При использовании схемы Горнера выражение (1) преобразуют к виду:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \\ &= ((a_nx + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_1) + a_0 \quad (2) \end{aligned}$$

Вычислительная сложность расчёта полинома степени n составляет $2n$ операций: n умножений и n сложений ($n(\times) + n(+)$). Кроме того в памяти необходимо хранить $n + 1$ константу a_0, a_1, \dots, a_n и запрашивать их при вычислении полинома.

Существуют различные методы поиска коэффициентов полинома (1) – это классический подход, основанный на разложении функции в ряд Тейлора (анализ точности аппроксимации функций применительно к ЦОС можно найти в [2]), ставший распространённым метод аппроксимации, основанный на применении полиномов Чебышева, особенно полиномов наилучшего приближения Чебышева, когда все $n + 2$ экстремальных значения погрешностей $\delta_i, i \in 0, 1, \dots, n + 1$ на интервале аппроксимации $x \in [a, b]$ поочередно меняют знак и равны между собой по абсолютной величине [2], и другие малоизвестные и мало применяемые на практике полиномы [6].

Целью данной работы является сравнительный анализ точности аппроксимации функциональных зависимостей при использовании ряда полиномов степени n на примере функции

вычисления квадратного корня на интервале значений от 0 до 1.

Разложение функций по ортогональным многочленам

В работе [6] показано, что для ортогональных многочленов $f_k(x)$ на отрезке $[a; b]$ с весовой функцией $\omega(x)$ при $m \neq n$ должно выполняться следующее условие

$$\int_a^b f_m(x)f_n(x)\omega(x)dx = 0. \quad (3)$$

Из соотношения (3) видно, что можно придумать большое количество ортогональных функций при соответствующем подборе весовых функций $\omega(x)$. В работе [6] приведены ортогональные многочлены на интервале $[-1; 1]$ и соответствующих им весовые функций $\omega(x)$. В таблице 1 показаны эти многочлены.

Из таблицы 1 видно, что из весовой функции $\omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, соответствующей многочленам Якоби, получаются остальные перечисленные в таблице ортогональные многочлены при определённых значениях α и β . Так многочлены Гегенбауэра являются частным случаем многочлена Якоби при $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$, многочлены Лежандра получаются из многочлена Якоби при $\alpha = \beta = 0$, многочлены Чебышева первого рода при $\alpha = \beta = -1/4$, а второго рода при $\alpha = \beta = 1/4$. Рассмотрим применение этих полиномов при аппроксимации функции $f(x) = \sqrt{x}$.

Многочлены Чебышева

Из всех многочленов, перечисленных в таблице 1 наиболее широко известными и применяемыми в практике ЦОС являются многочлены Чебышева. Многочлен Чебышева первого рода, удовлетворяющий (3) с весовой функцией $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ определяется рекуррентным уравнением вида

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (4)$$

при $T_0(x) = 1$ и $T_1(x) = x$.

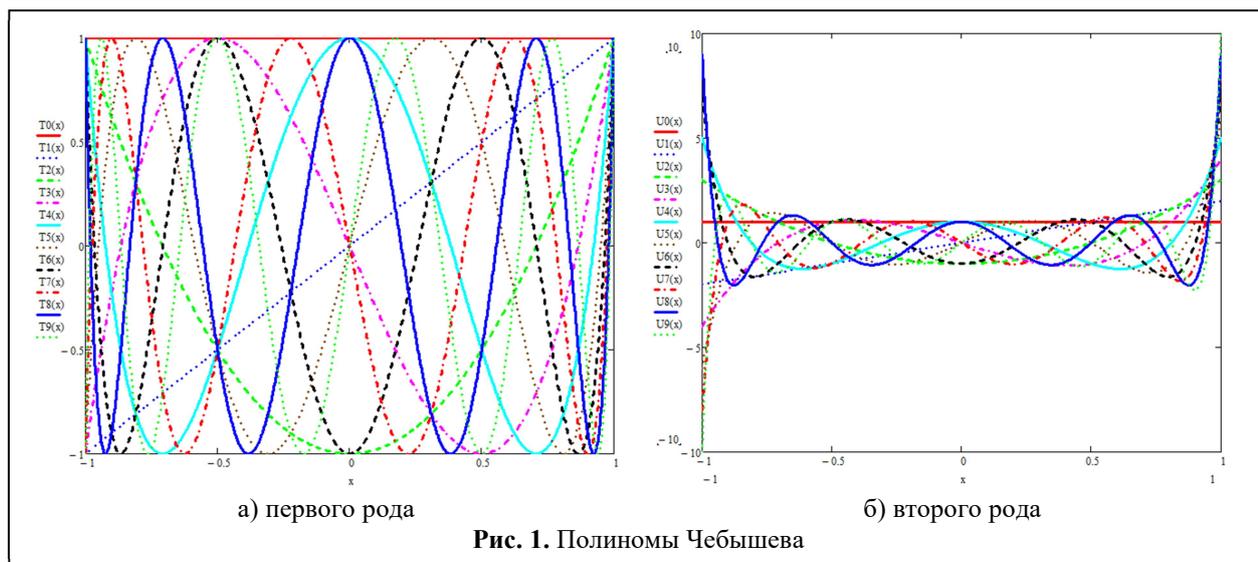


Рис. 1. Полиномы Чебышева

На рис. 1 а) приведены графики первых десяти полиномов Чебышева первого рода на интервале $[-1; 1]$.

Как видно из рис. 1, при любом значении n на интервале значений $x \in [-1; 1]$ функция $T_n(x)$ центрирована относительно нуля, является либо чётной, либо нечётной (согласно n). Экстремумы функции $T_n(x)$ поочередно меняют знак и равны между собой по абсолютной величине единице.

Многочлены Чебышева второго рода $U_n(x)$ могут быть определены на интервале значений $x \in [-1; 1]$ с помощью рекуррентного соотношения

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) \quad (5)$$

при $U_0(x) = 1$ и $U_1(x) = 2x$.

На рис. 1 б) приведены графики изменения первых десяти полиномов Чебышева второго рода. Как видно из рис. 1 б) полиномы Чебышева второго рода, в отличие от предыдущих полиномов, на краях интервала принимают значения большие единицы, хотя как и полиномы первого рода центрированы относительно нуля и являются чётными или нечётными функциями.

Для нахождения коэффициентов ряда Чебышева первого рода нужно воспользоваться соотношением (3) при $a = -1$, $b = 1$ и $\omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, получаем

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & m = n > 0, \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Если записать ряд Чебышева для функции $f(x)$ в виде

$$\varphi(x) = \frac{c_0}{2} + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \dots, \quad (7)$$

умножить обе части равенства (7) на $\frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, проинтегрировать ряд почленно по отрезку $[-1; 1]$ и воспользоваться (6), то получим выражение для нахождения коэффициентов ряда (7)

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Для полиномов Чебышева второго рода коэффициенты ряда (7) находятся из выражения

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Рассмотрим разложение функции

$$f(x) = \sqrt{x}$$

на интервале значений $[0, 1]$ с использованием полиномов Чебышева первого и второго рода до 9 порядка. Точность аппроксимации функции будем оценивать двумя методами – по величине максимальной ошибки на интервале аппроксимации и величине площади под кривой ошибки [7].

Таблица 2

Порядок полинома	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
δ_+	0,363	0,082	0,046	0,032	0,025	0,02	0,017	0,015	0,013	0,012
δ_-	0,637	0,212	0,127	0,091	0,071	0,058	0,049	0,042	0,037	0,034
$S_{\text{ош}}$	0,03	0,05	0,022	0,012	$7,98 \cdot 10^{-3}$	$5,56 \cdot 10^{-3}$	$4,08 \cdot 10^{-3}$	$3,13 \cdot 10^{-3}$	$2,47 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$

Таблица 3

Порядок полинома	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
δ_+	0,321	0,031	0,03	0,01	0,011	0,0065	0,0058	0,0048	0,0042	0,0038
δ_-	0,679	0,291	0,194	0,107	0,119	0,1	0,086	0,076	0,068	0,0085
$S_{\text{ош}}$	0,196	0,034	0,013	$6,3 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$8,1 \cdot 10^{-4}$	$6,2 \cdot 10^{-4}$

Поскольку интервал аппроксимации функций отличается от интервала разложения полиномов Чебышева $[-1; 1]$, то для приведения отрезка определения функции $[a; b]$ к стандартному $[-1; 1]$ воспользуемся заменой переменной вида

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (10)$$

В таблице 2 приведены значения максимальных отклонений аппроксимирующей функции от эталонной на интервале от 0 до 1 положительные δ_+ и отрицательные δ_- . Четвёртой строкой в таблице 2 приведены значения полученной площади ошибки на интервале $[0; 1]$.

В таблице 3 приведены значения максимальных отклонений аппроксимирующей функции от $f(x) = \sqrt{x}$ от на интервале от 0 до 1 для полиномов Чебышева второго рода.

На рис. 2 приведены графики ошибок аппроксимации при использовании полиномов Чебышева 9 степени первого рода (точечная кривая) и второго рода (сплошная кривая). Как видно из рис. 2 кривые ошибок носят колебательный характер на интервале аппроксимации относительно нулевого значения, причём значения максимальных отклонений разные и полученные кривые существенно отличаются от кривой ошибок, соответствующей полиному наилучшего приближения Чебышева [2]. Т.е. использование полиномов (4) при аппроксима-

ции функции не обеспечивает максимально достижимой точности аппроксимации. Кроме этого, из сравнения кривых рис. 2 видно, что точность аппроксимации функции при использовании полиномов второго рода выше, чем при использовании полиномов первого рода.

Из таблиц 2 и 3 видно, что увеличение степени полинома максимальные отклонения ошибок аппроксимации уменьшаются, так же уменьшаются значения площади под кривой ошибок. Из сравнения значений таблиц 2 и 3 видно, что точность аппроксимации функции при использовании полиномов 2-го рода выше чем при использовании полиномов Чебышева 1-го рода.

Многочлены Лежандра

Для этих многочленов при $n \geq 1$ справедлива следующая рекуррентная формула вида [5]

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x), \quad (11)$$

при этом первые две функции как и в случае полиномов Чебышева первого рода равны $P_0(x) = 1$ и $P_1(x) = x$.

На рис. 3 приведены графики полиномов Лежандра до 9 порядка при $x \in [-1; 1]$.

Из сравнения рис. 1 а) и рис. 3 видно, что характер изменения функций одинаковый, но если полиномы Чебышева при $x \in [-1; 1]$ изменяются от -1 до 1 , то диапазон изменения по-

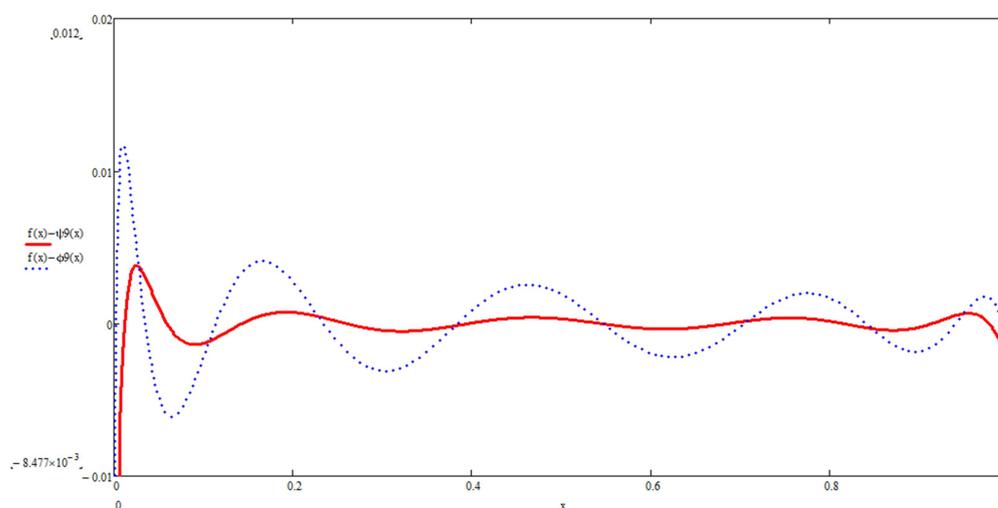


Рис. 2. Графики ошибок аппроксимации функции $f(x) = \sqrt{x}$ при использовании полиномов Чебышева 1-го рода (точечная кривая) и 2-го рода (сплошная кривая) девятого порядка

линомов Лежандра меньше внутри интервала значений x .

Как видно из таблицы 1 весовая функция для многочлена Лежандра равна единице, то расчёт коэффициентов для функции (7) проводим по соотношению

$$c_n = \frac{2n + 1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx, n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Рассмотрим разложение функции корня $f(x) = \sqrt{x}$ на интервале значений $[0, 1]$ с использованием многочленов Лежандра до 9 порядка. В таблице 4 приведены значения максимальных отклонений от эталонной функции и значения полученной площади ошибки для

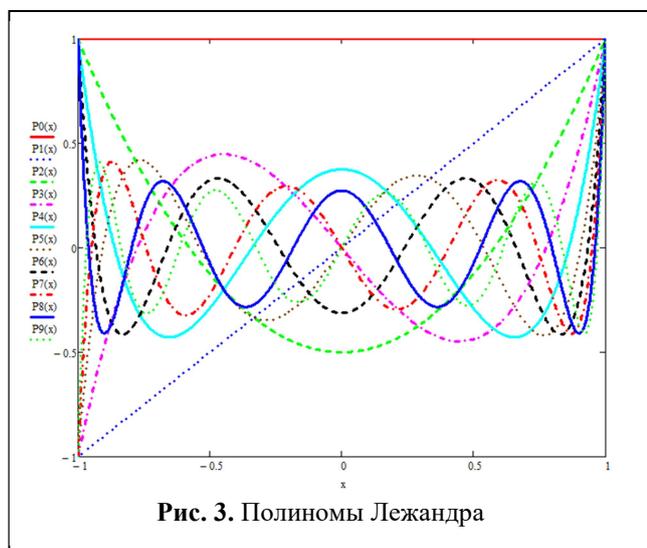


Рис. 3. Полиномы Лежандра

полиномов разных порядков.

Из сравнения значений таблиц 2, 3 и 4 видно, что при использовании полиномов Лежандра точность аппроксимации функции выше, чем при использовании полиномов Чебышева первого рода, но ниже чем у полиномов второго рода.

Многочлены Гегенбауэра

Для этих многочленов при $n \geq 2$ справедлива следующая рекуррентная формула

$$C_n^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{n} \left[2x(n + \lambda - 1) C_{n-1}^{(\lambda)}(x) - (n - 2\lambda - 2) C_{n-2}^{(\lambda)}(x) \right] \quad (13)$$

при первых двух функциях $C_0^{(\lambda)}(x) = 1$ и $C_1^{(\lambda)}(x) = 2\lambda x$.

Из таблицы 1 видно, что при $\lambda = 0$ полиномы Гегенбауэра переходят в полиномы Чебышева первого рода, при $\lambda = 1$ — второго рода, а при $\lambda = 1/2$ в полиномы Лежандра. В случае полиномов Гегенбауэра коэффициенты ряда (7) вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{2^{1-2\lambda} \pi \Gamma(n + 2\lambda)}{n! (n + \lambda) [\Gamma(\lambda)]^2} \times \int_{-1}^1 f(x) C_n^{(\lambda)}(x) (1 - x^2)^{\lambda-1/2} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

Таблица 4

Порядок полинома	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
δ_+	0,333	0,046	0,029	0,017	0,013	0,011	$9,1 \cdot 10^{-3}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$6,94 \cdot 10^{-3}$	$6,3 \cdot 10^{-3}$
δ_-	0,637	0,267	0,171	0,127	0,097	0,062	0,043	0,063	0,056	0,05
$S_{\text{ош}}$	0,198	0,037	0,015	$7,65 \cdot 10^{-3}$	$4,6 \cdot 10^{-3}$	$3,04 \cdot 10^{-3}$	$2,12 \cdot 10^{-3}$	$1,58 \cdot 10^{-3}$	$1,18 \cdot 10^{-3}$	$9,1 \cdot 10^{-4}$

Таблица 5

Порядок полинома	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
δ_+	0,305	0,013	0,03	$2,97 \cdot 10^{-3}$	0,012	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$4,29 \cdot 10^{-3}$	$1,11 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-4}$
δ_-	0,695	0,324	0,229	0,181	0,151	0,13	0,114	0,102	0,092	0,084
$S_{\text{ош}}$	0,195	0,034	0,013	$6,51 \cdot 10^{-3}$	$3,75 \cdot 10^{-3}$	$2,36 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$9,3 \cdot 10^{-8}$	$7,32 \cdot 10^{-4}$	$5,3 \cdot 10^{-4}$

где $\Gamma(\lambda)$ – гамма функция.

Графики первых десяти многочленов Гегенбауэра при $\lambda = 1/4$ приведены на рис. 4 а), при $\lambda = 3$ на рис. 4 б).

Из рис. 4 видно, что при $\lambda < 1$ полиномы на интервале $[-1; 1]$ принимают значения меньше единицы, причём чем меньше λ тем меньше размах изменения полиномов на интервале $[-1; 1]$. При $\lambda > 1$ значения диапазон изменения значений полиномов возрастают, причем, чем больше значение λ , тем больше этот диапазон, кроме этого на краях интервала значения полиномов выше второго порядка уходят в бесконечность.

Рассмотрим аппроксимацию функции корня при помощи многочленов Гегенбауэра. В таблице 5 приведены ошибки аппроксимации при $\lambda = 2$. На рис. 5 приведены графики изменения

площади ошибок при использовании полиномов 7 (сплошная кривая) и 9 (штриховая кривая) степени в зависимости от изменения λ .

Из рис. 5 видно, что оптимальное значение коэффициента λ , обеспечивающее наименьшее значение ошибок аппроксимации, находится в диапазоне между 1,5 и 2.

Из сравнения значений таблиц 5 и 4 видно, что использование многочленов Гегенбауэра при $\lambda = 2$ обеспечивает наименьшие ошибки аппроксимации из всех рассмотренных выше полиномов.

Многочлены Якоби

Многочлен Якоби определяется формулой

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{n! 2^n} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \times \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}]. \quad (15)$$

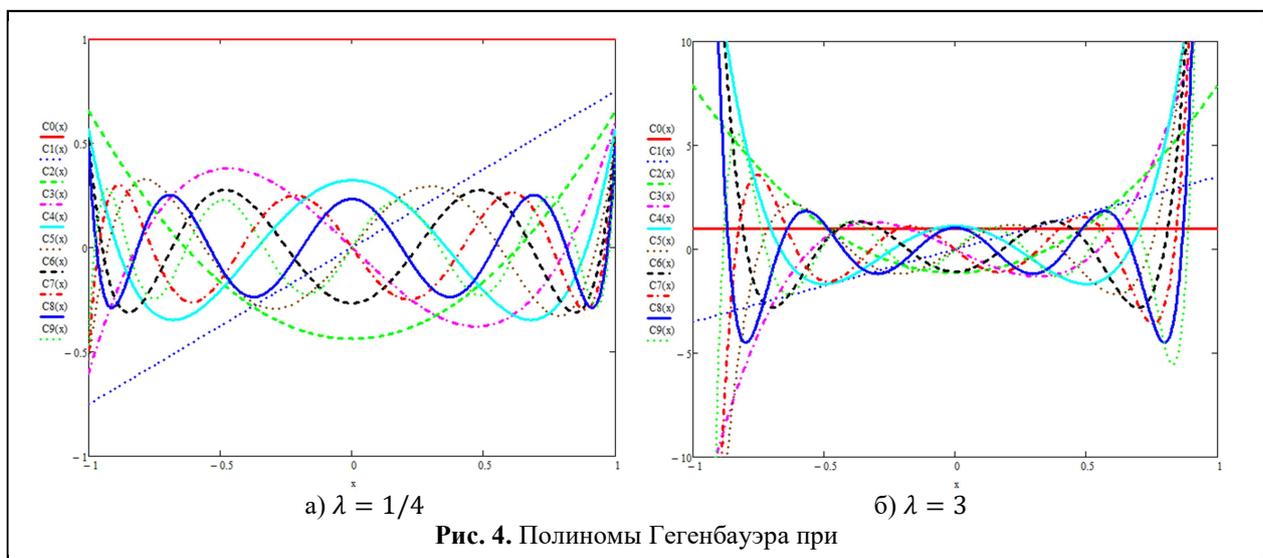


Рис. 4. Полиномы Гегенбауэра при

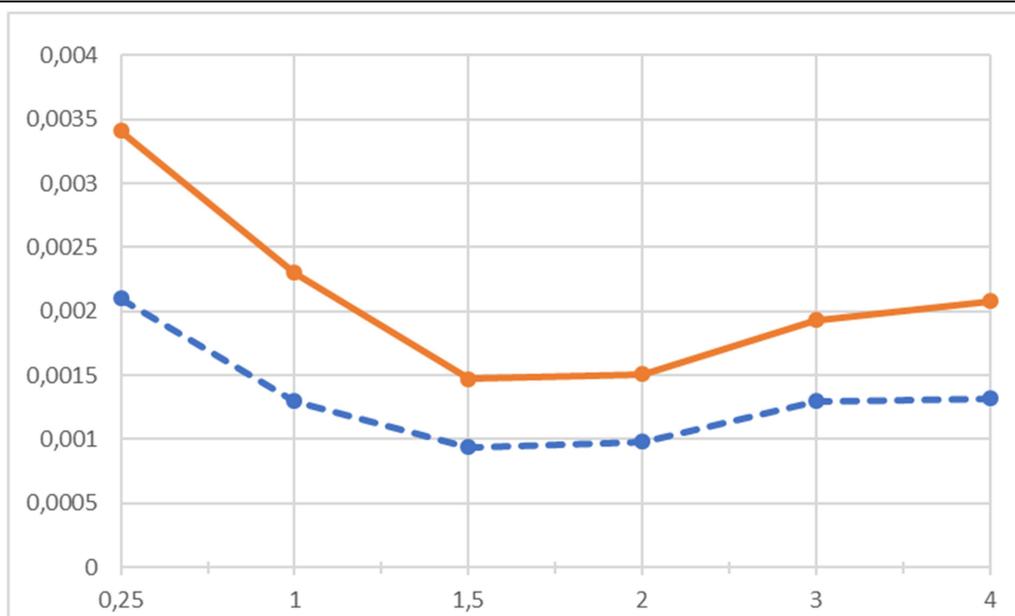
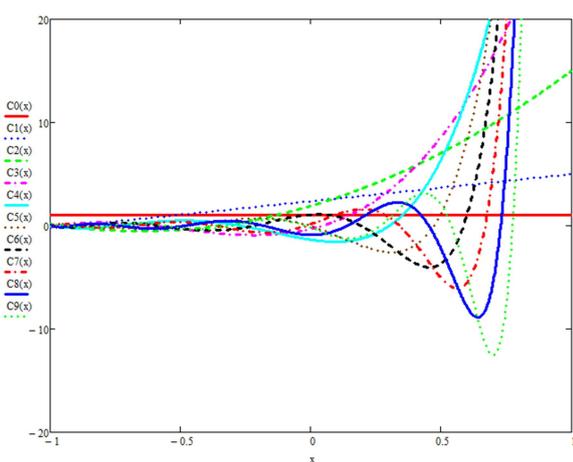
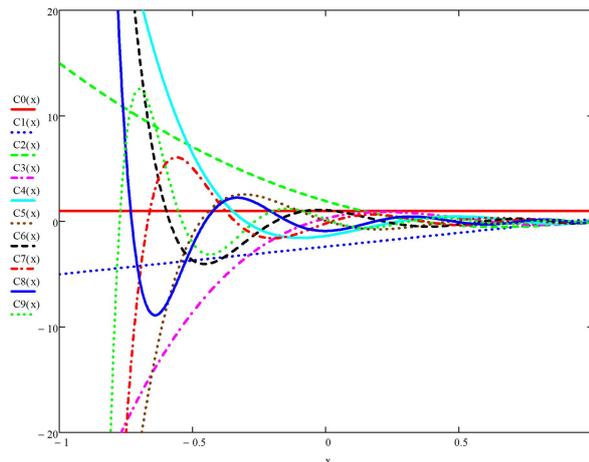


Рис. 5. Графики изменения $S_{ош}$ от λ для функции корня при использовании полиномов 7-й (сплошная кривая) и 9-й (штриховая кривая) степени



а) $\alpha = 4$ $\beta = -\frac{3}{4}$



б) $\alpha = -\frac{3}{4}$ $\beta = 4$

Рис. 6. Полиномы Якоби при

Многочлены Якоби (15) ортогональны на отрезке $[-1; 1]$ с весом $\omega(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$.

Весовая функция, с помощью которой получают многочлены Якоби зависит от двух параметров $\alpha > -1$ и $\beta > -1$. Если $\alpha = \beta$, то получаются многочлены Гегенбауэра, рассмотренные выше. На рис. 6 а) приведены многочлены Якоби на интервале значений $[-1; 1]$ при $\alpha = 4$ и $\beta = -3/4$, а на рис. 6 б) при $\alpha = -3/4$, а $\beta = 4$. Из рисунков видно,

что многочлены являются несимметричными функциями относительно середины интервала.

В таблице 6 приведены значения ошибок аппроксимации функции корня при $\alpha = 4$ и различных значения β для полиномов 7-го и 9-го порядков, а в таблице 7 аналогичные результаты, но при $\beta = 4$ и различных значениях α .

На рис. 7 и рис. 8 приведены графики изменения $S_{ош}$ в зависимости от β и α соответственно при использовании полинома 7-й сте-

Таблица 6

$\alpha = 4$								
Порядок полинома 7								
β	-1/2	0	1/2	1	1,5	2	3	4
δ_+	0,76	0,024	$9,5 \cdot 10^{-3}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$8,2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$
δ_-	3,71	1,14	0,435	0,189	0,091	0,047	0,015	0,112
$S_{\text{ош}}$	0,176	0,052	0,02	$8,5 \cdot 10^{-3}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,41 \cdot 10^{-3}$
Порядок полинома 9								
β	-1/2	0	1/2	1	1,5	2	3	4
δ_+	0,11	0,031	0,011	$4,4 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$6,3 \cdot 10^{-4}$	$3,7 \cdot 10^{-4}$
δ_-	5,8	1,6	0,55	0,216	0,094	0,044	0,012	0,093
$S_{\text{ош}}$	0,118	0,05	0,017	$6,6 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$8,6 \cdot 10^{-4}$	$8,1 \cdot 10^{-4}$

Таблица 7

$\beta = 4$								
Порядок полинома 7								
α	-1/2	0	1/2	1	1,5	2	3	4
δ_+	$4,3 \cdot 10^{-4}$	$4,8 \cdot 10^{-4}$	$4,9 \cdot 10^{-4}$	$4,1 \cdot 10^{-4}$	$4,7 \cdot 10^{-4}$	$4,8 \cdot 10^{-4}$	$4,9 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$
δ_-	0,131	0,128	0,125	0,123	0,121	0,119	0,115	0,112
$S_{\text{ош}}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$1,65 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,45 \cdot 10^{-3}$	$1,41 \cdot 10^{-3}$
Порядок полинома 9								
α	-1/2	0	1/2	1	1,5	2	3	4
δ_+	$4,6 \cdot 10^{-4}$	$3,8 \cdot 10^{-4}$	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$3,5 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$	$3,7 \cdot 10^{-4}$
δ_-	0,107	0,105	0,104	0,102	0,1	0,099	0,096	0,093
$S_{\text{ош}}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}	$9,9 \cdot 10^{-4}$	$9,4 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$8,7 \cdot 10^{-4}$	$8,2 \cdot 10^{-4}$	$8,1 \cdot 10^{-4}$

пени (сплошная кривая) и 9-й степени (пунктирная кривая).

Из значений таблиц 6 и 7, а так же рис. 7 и 8 видно, что в случае если у многочленов Якоби $\alpha \neq \beta$, то точность аппроксимации хуже, чем в противном случае, причем случай, когда $\alpha > \beta$ сильнее влияет на точность аппроксимации, по сравнению со случаем, когда $\alpha < \beta$. При $\alpha > \beta$ аппроксимирующая кривая существенно отличается в районе правого края интервала аппроксимации от исходной функциональной зависимости, обратная ситуация не столь катастрофически влияет на точность аппроксимации, что наглядно видно из сравнения рис. 7 и рис. 8. Крайнее правое значение у соответствующих одинаковое на обоих рисунках, а крайнее левое отличается почти на два порядка рис. 7 и менее чем в два раза на рис. 8.

Выводы

Полученные результаты показали следующее:

1. Полиномиальные методы аппроксимации позволяют получить практически любую точность представления функции, заданной аналитически на определенном интервале значений;
2. Многочлены Якоби обладают максимальным числом степеней свободы при выборе коэффициентов полинома, поскольку зависят от двух параметров α и β , причём, как показали результаты расчётов случай, когда $\alpha < \beta$ более предпочтителен для расчётов коэффициентов полинома, поскольку различие между параметрами не столь сильно влияет на точность аппроксимации, однако при использовании этих многочленов возникает необходимость в нормировке коэффициентов полинома и кроме того аналитические расчёты интегралов для более сложных функций наталкиваются на се-

рьёзные сложности, что приводит к использованию численных методов решения, приводя дополнительные погрешности;

3. Наилучшие результаты аппроксимации показали полиномы Гегенбауэра, которые получаются из полиномов Якоби при $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$, при этом максимальная точность аппроксимации получается при $\lambda \in [1,5; 2]$, однако многочлены Гегенбауэра зависят только от одного параметра, что ограничивает общее количество их возможных вариантов и, как в случае многочленов Якоби, появляются те же самые сложности при расчётах коэффициентов полиномом;

4. Полиномы Чебышева первого и второго рода могут обеспечить достаточно высокие показатели эффективности, причем точность аппроксимации полиномов Чебышева второго рода выше чем первого, однако эти полиномы получаются только

для двух конкретных весовых функций и других значений полиномов не существует, кроме того в ряде случаев, так же приходится использовать численные методы для расчёта коэффициентов полиномов;

5. Самыми простыми для расчёта коэффициентов, но обладающие наихудшими точностными характеристиками обладают многочлены Лежандра, точность аппроксимации при помощи этих полиномов несколько выше, чем при разложении в ряд Тейлора, но хуже, чем у всех рассмотренных полиномов;

6. Все рассмотренные подходы к получению

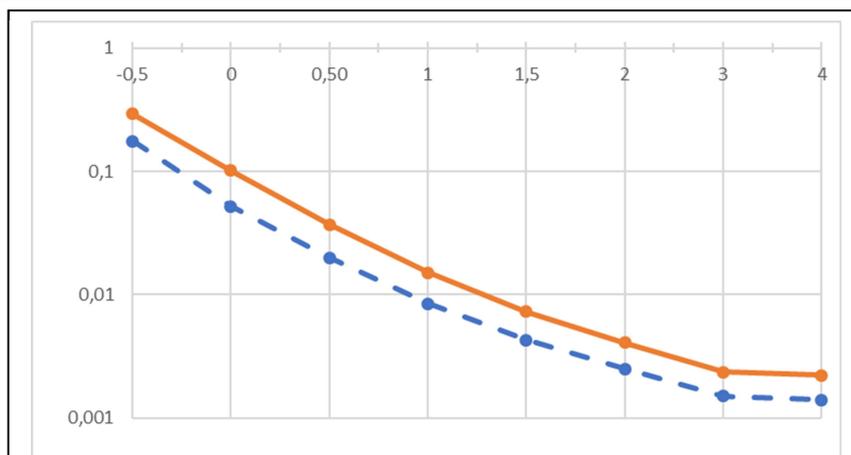


Рис. 7. Графики изменения $S_{\text{ош}}$ от β для функции корня при использовании полиномов Якоби 7-й (сплошная кривая) и 9-й (штриховая кривая) степени

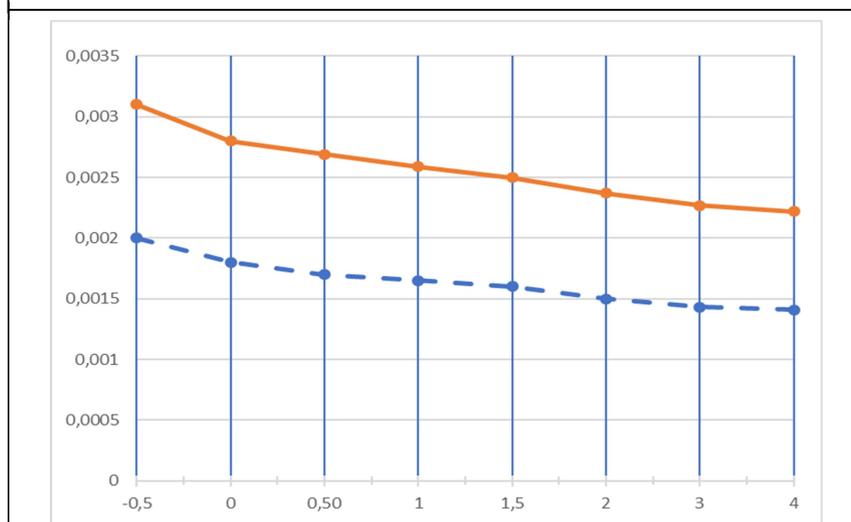


Рис. 8. Графики изменения $S_{\text{ош}}$ от α для функции корня при использовании полиномов Якоби 7-й (сплошная кривая) и 9-й (штриховая кривая) степени

полиномиальных функций обладают общим недостатком – они не соответствуют полиному наилучшего приближения, когда максимальные отклонения от истинного значения одинаковы на всем интервале аппроксимации функции.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-37-00077 и конкурса инновационных проектов Владимирской области «УМ-НИК-2018».

Литература

1. Байков В.Д., Смолов В.Б. Аппаратурная реализация элементарных функций в ЦВМ. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1975. 96 с.
2. Chekushkin V.V., Zhiganov S.N. Computational methods in optimization of engineering problems // Raleigh, North Carolina, USA: Open Science Publishing, 2018. 202 p.
3. Пантелеев И.В., Чекушкин В.В. Совершенствование полиномиальных методов воспроизведения тригонометрических функций в информационно-вычислительных системах // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2013. № 1. С. 53–59.
4. Чекушкин В.В., Михеев К.В. Быстродействующие алгоритмы поиска полиномов наилучшего приближения для воспроизведения функциональных зависимостей в информационно-измерительных системах // Измерительная техника. 2016. № 4. С. 7–10.
5. Данилин С.Н., Щаников С.А., Борданов И.А., Зуев А.Д., Пантюхин Д.В., Пантелеев С.В. Состояние исследований в области инженерного проектирования и производства нейрокompьютеров // Алгоритмы, методы и системы обработки данных [электронный ресурс]. 2019. № 1 (39). Режим доступа: <http://files.amisod.ru/mediacontent/vipuski/2019/1/amisod-2019-01-39-danilin-and-other.pdf>
6. Прасолов В.В. Многочлены. 4-е изд., исправленное. М.: МЦНМО, 2014. 336 с.
7. Жиганов С.Н., Михеев К.В. Поиск полиномов Чебышева, обеспечивающих минимизацию площади ошибок // Методы и устройства передачи и обработки информации. 2018. Вып. 20. С. 100–102.

Поступила 21 января 2020 г.

English

POLYNOMIALS' APPLICATION IN APPROXIMATION OF FUNCTIONAL DEPENDENCIES IN DSP

Sergey Nikolayevich Zhiganov – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Radio Engineering Department, Murom Institute (Branch) Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Professional Education “Vladimir State University named after A.G. and N.G. Stoletov”¹.

Kirill Valeryevich Mikheyev – Candidate of Engineering Sciences, Lead Engineer, JSC “Murom Plant of Radio Measuring Instruments”².

Elena Aleksandrovna Zhiganova – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Radio Engineering Department, Murom Institute (Branch) Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Professional Education “Vladimir State University named after A.G. and N.G. Stoletov”¹.

Alexey Valeryevich Rakitin – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Radio Engineering Department, Murom Institute (Branch) Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Professional Education “Vladimir State University named after A.G. and N.G. Stoletov”¹.

E-mail: s_zh_72@mail.ru.

¹*Address:* 602254, Russian Federation, Vladimir region, Murom, Orlovskaya street, 23.

²*Address:* 602267, Russian Federation, Vladimir region, Murom, Karacharovskoe highway, 2.

Abstract: Today's digital processors implement only simple arithmetic and logic operations at hardware level, and various techniques and computational algorithms of approximation are used to calculate more complex functions. As far as computing machinery is concerned, these expressions should consist (directly or in their decomposition) of processor-understandable elementary arithmetic operations. Polynomial approximation method has found wide application in reproduction of functional dependencies, which is used for many scientific and applied technical tasks: from approximation of standard mathematical functions in current specific-purpose microprocessors and inclusive to implementation of calibration curves in reproduction of working standards, gauge and measurement systems' calibration. For example, labour-consuming operations of obtaining standard values of a priori unknown functional dependencies mostly conclude by approximation with given accuracy by polynomials of varying degrees. There are various methods to search polynomial coefficients - this is a classical approach based on expansion of a function in Taylor's series, which has become a common method of approximation, based on applying Chebyshev polynomials, especially those of Chebyshev's polynomials of best approximation, when all extreme values of errors on approximation interval alternately change the sign and are equal to each other in absolute magnitude, and other lesser-known and practically of little use poly-

mials. The research work enabled to obtain coefficients of polynomial function to the 9th degree, using Chebyshev first and second-order polynomials and polynomials of Legendre, Gegenbauer and of Jacobi. Maximum deviation values of approximation function from the approximated one on the interval of values are calculated using the example of square root calculation function, as well as error area values are calculated. Performed research has shown that polynomial approximation methods enable to obtain almost any accuracy of function representation specified analytically on the definite interval of values. The best approximation results from all reviewed ones were demonstrated by Gegenbauer polynomials. However, all the examined approaches to obtain polynomial functions have a shared fault – they do not correspond to polynomial of best approximation, when maximum deviations from true value are the same throughout function approximation interval.

Keywords: polynomial functions, polynomials of Legendre, the first and second-order polynomials of Chebyshev, polynomials of Gegenbauer and Jacobi.

The research work was fulfilled with the assistance of RFBR grant No. 18-37-00077 and Innovative project initiative "UMNIK-2018" of Vladimirskaya oblast.

References

1. Baykov V.D., Smolov V.B. Hardware implementation of elementary functions in computers. Leningrad: Leningrad University Publishing, 1975. 96 p.
2. Chekushkin V.V., Zhiganov S.N. Computational methods in optimization of engineering problems. Raleigh, North Carolina, USA: Open Science Publishing, 2018. 202 p.
3. Panteleev I.V., Chekushkin V.V. Perfecting polynomial methods for reproducing trigonometric functions in information and computing systems. Radio and Telecommunications Systems. 2013. No. 1. Pp. 53–59.
4. Chekushkin V.V., Mikheev K.V. Fast-acting algorithms for searching for the best approximation polynomials for reproducing functional dependencies in information and measurement systems. Measurement techniques. 2016. No. 4. Pp. 7–10.
5. Danilin S.N., Shchanikov S.A., Bordanov I.A., Zuev A.D., Pantyukhin D.V., Panteleev S.V. State of research in the field of engineering design and production of neurocomputers. Algorithms, methods and systems of data processing [electronic source]. 2019. No. 1 (39). URL: <http://files.amisod.ru/mediacontent/vipuski/2019/1/amisod-2019-01-39-danilin-and-other.pdf>
6. Prasolov V.V. Polynomials. 4th ed., corrected. Moscow: MTsNMO, 2014. 336 p.
7. Zhiganov S.N., Mikheev K.V. Search for Chebyshev polynomials that ensure the minimization of error areas. Metody i ustrojstva peredachi i obrabotki informacii. 2018. Vol. 20. Pp. 100–102.