

УДК 537.86.029.

ДЕВИАЦИЯ ЧАСТОТЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ**Попов Игорь Павлович**

старший преподаватель ФГБОУ ВО «Курганский государственный университет».

E-mail: ip.porow@yandex.ru.

Адрес: 640020, Россия, г. Курган, ул. Советская, д. 63/4.

Аннотация: Установлено, что частота электромагнитной волны, воспринимаемая приёмником, не всегда совпадает с частотой излучения. Электромагнитная волна, излучаемая уединённым точечным источником, является сферической. Это амплитудно-модулированная волна. В этой связи она не является монохроматической. Воспринимаемая частота электромагнитной сферической волны меньше частоты излучения. Чем выше излучаемая частота и расстояние между источником и приёмником, тем больше разница между излучаемой и воспринимаемой частотами. В соответствии с принципом Гюйгенса каждая точка, до которой доходит электромагнитная волна, служит источником вторичных волн. Воспринимаемая частота сферической электромагнитной волны в любом случае меньше исходной частоты излучения и уменьшается по мере удаления от источника, что обуславливается математическими особенностями спектра сферической электромагнитной волны.

Ключевые слова: источник, приёмник, излучение, волна, частота, спектр.

Введение. Воспринимаемая частота.

Частота волны, воспринимаемая приёмником, не всегда совпадает с частотой излучения. Наиболее распространённым примером тому является эффект Доплера, который, вместе с тем, не является единственно возможной причиной такого несовпадения.

Пусть имеются две волны

$$w_1 = E_0 e^{i(\omega_1 t - k_1 r)} \text{ и } w_2 = E_0 e^{i(\omega_2 t - k_2 r)}$$

[1–4] (для целей настоящего рассмотрения начальная фаза не имеет значения). Их суперпозиция равна

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= E_0 e^{i(\omega_1 t - k_1 r)} + E_0 e^{i(\omega_2 t - k_2 r)} = \\ &= E_0 \left[\cos(\omega_1 t - k_1 r) + i \sin(\omega_1 t - k_1 r) + \right. \\ &\quad \left. + \cos(\omega_2 t - k_2 r) + i \sin(\omega_2 t - k_2 r) \right] = \\ &= E_0 \left\{ \left[\cos(\omega_1 t - k_1 r) + \cos(\omega_2 t - k_2 r) \right] + \right. \\ &\quad \left. + i \left[\sin(\omega_1 t - k_1 r) + \sin(\omega_2 t - k_2 r) \right] \right\} = \\ &= E_0 \left[2 \cos \frac{(\omega_1 t - k_1 r) + (\omega_2 t - k_2 r)}{2} \times \right. \\ &\quad \times \cos \frac{(\omega_1 t - k_1 r) - (\omega_2 t - k_2 r)}{2} + \\ &\quad \left. + i 2 \sin \frac{(\omega_1 t - k_1 r) + (\omega_2 t - k_2 r)}{2} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left. \times \cos \frac{(\omega_1 t - k_1 r) - (\omega_2 t - k_2 r)}{2} \right] = \\ &= 2E_0 \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)r}{2} \times \\ &\times \left[\cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)r}{2} + \right. \\ &\quad \left. + i \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)r}{2} \right] = \\ &= 2E_0 \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)r}{2} e^{i \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} r \right)} = \\ &= E_0 k(\omega, t) e^{i \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} r \right)}. \end{aligned}$$

Из этого следует, что при суперпозиции волн воспринимаемая частота равна промежуточному значению их частот, например, сочетание синего и желтого цвета воспринимается как зелёный.

Спектр сферической волны

Электромагнитная волна, излучаемая уединённым точечным источником, является сферической

$$w = \frac{E_0}{r} \sin(\omega_0 t - kr) = \frac{E_0}{ct} \sin(\omega_0 t - kr),$$

где E_0 – амплитуда напряжённости электрической составляющей поля на единичном рассто-

янии от центра волны. Это амплитудно-модулированная волна. В этой связи она не является монохроматической [5–7]. Для функции

$$f(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{t}$$

косинус-преобразование Фурье имеет вид

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad 0 < \omega < \omega_0, \\ 0, \quad \omega > \omega_0,$$

поэтому функция представима в виде

$$\frac{\sin \omega_0 t}{t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\omega_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos \omega t d\omega = \int_0^{\omega_0} \cos \omega t d\omega. \quad (1)$$

Здесь частоты всех составляющих гармоник меньше ω_0 . Из этого следует, что воспринимаемая частота определяется неравенством $0 < \omega < \omega_0$. Другими словами, воспринимаемая частота сферической волны меньше частоты излучения. Очевидно, что чем выше излучаемая частота ω_0 и расстояние между источником и приёмником, тем больше разница между излучаемой и воспринимаемой частотами.

Последнее обстоятельство можно записать в виде:

$$\Delta\omega = -C^* \omega_0 r = -C^* \omega_0 ct, \quad (2)$$

где C^* – некий коэффициент. Знак « \rightarrow » указывает на уменьшение частоты.

Первая формула воспринимаемой частоты сферической волны

В соответствии с принципом Гюйгенса, согласно которому каждая точка, до которой доходит волна, служит источником вторичных волн, выражение (2) можно записать в дифференциальной форме

$$d\omega = -C\omega dt.$$

Из этого следует

$$\frac{d\omega}{\omega} = -Cdt, \quad \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega} = -\int_{\tau}^t Cdt, \quad \ln \omega \Big|_{\omega_0}^{\omega} = -Ct \Big|_{\tau}^t,$$

$$\ln \omega - \ln \omega_0 = C(\tau - t), \quad \ln \frac{\omega}{\omega_0} = C(\tau - t),$$

$$\omega = \omega_0 e^{C(\tau-t)}. \quad (3)$$

Здесь $\tau = R/c$, R – радиус излучающей поверхности [8], которая принимается сферической, c – скорость волны. Необходимость введения ненулевого τ станет очевидной при дальнейшем рассмотрении.

$$t = \tau \Rightarrow \omega = \omega_0, \quad t \rightarrow \infty \Rightarrow \omega \rightarrow 0.$$

Выражение (3) – первая формула воспринимаемой частоты сферической волны.

Вторая формула воспринимаемой частоты сферической волны

Дифференциал левой части выражения (1) равен

$$df(t) = \frac{\omega_0 t \cos \omega_0 t - \sin \omega_0 t}{t^2} dt.$$

Дифференциал правой, соответственно,

$$df(\omega) = \cos \omega t d\omega.$$

В соответствии с (1)

$$\frac{\omega_0 t \cos \omega_0 t - \sin \omega_0 t}{t^2} dt = \cos \omega t d\omega,$$

$$\int_{\tau}^t \frac{\omega_0 t \cos \omega_0 t - \sin \omega_0 t}{t^2} dt = -\int_{\omega_0}^{\omega} \cos \omega t d\omega,$$

$$\frac{\sin \omega_0 t}{t} \Big|_{\tau}^t = -\frac{\sin \omega t}{t} \Big|_{\omega_0}^{\omega}.$$

Знак « \rightarrow » указывает на уменьшение частоты.

$$\frac{\sin \omega_0 t}{t} - \frac{\sin \omega_0 \tau}{\tau} = -\frac{\sin \omega t}{t} + \frac{\sin \omega_0 t}{t},$$

$$\frac{\sin \omega_0 \tau}{\tau} = \frac{\sin \omega t}{t}, \quad (4)$$

$$\omega = \frac{1}{t} \arcsin \frac{t \sin \omega_0 \tau}{\tau}. \quad (5)$$

$$t = \tau \Rightarrow \omega = \omega_0, \quad t \rightarrow \infty \Rightarrow \omega \rightarrow 0.$$

Полученное выражение – вторая формула воспринимаемой частоты сферической волны.

Частота ω , начиная с некоторого значения t , будет комплексной. Качественно представить этот феномен можно следующим образом. Если у плоской волны её фронт не расширяется и поэтому некая локальная область фронта перемещается исключительно в продольном направлении [9], что ассоциируется с движе-

нием по числовой оси, на которой λ – вещественная величина, то у сферической волны её фронт расширяется и поэтому некая локальная область фронта перемещается и в продольном и в поперечном направлении, что ассоциируется с движением в комплексной плоскости, в которой λ – комплексная величина. Тогда в соответствии с формулой

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

ω – тоже комплексная величина.

С другой стороны, значение $\sin \omega_0 \tau = 0$ на излучающей поверхности антенны вполне соответствует здравому смыслу. В этой связи для вещественных значений частоты в соответствии с (4) имеют место выражения

$$\sin \omega_0 \tau = 0 \Rightarrow \sin \omega t = 0 \Rightarrow \omega t = \omega_0 \tau, \quad \omega = \frac{\omega_0 \tau}{t}$$

Третья формула воспринимаемой частоты сферической волны

Амплитуда сферической волны на расстоянии r от её идеализированного точечного источника равна

$$E = \frac{E_0}{r} = \frac{E_0}{ct} \tag{6}$$

Её дифференциал, соответственно,

$$dE = -\frac{E_0}{ct^2} dt \tag{7}$$

Величина (6) может быть в соответствии с рис. 1 представлена следующим образом.

$$E = \frac{E_0}{R} - (r - R) \operatorname{tg} \varphi \tag{8}$$

Другими словами, $E = f(\varphi)$, т.е. φ является определяющим параметром для E .

Из (8) следует

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_0/R - E}{r - R} = \frac{E_0/R - E_0/ct}{ct - R}$$

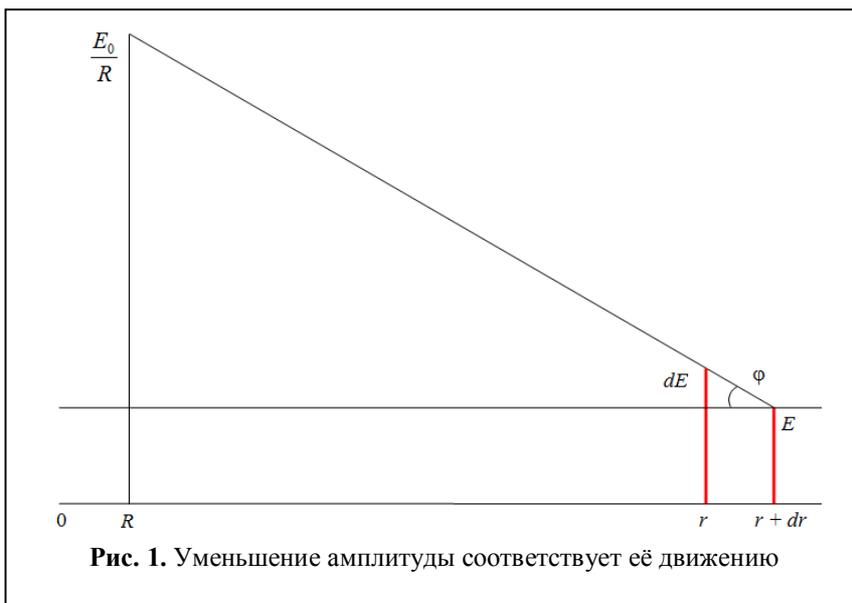


Рис. 1. Уменьшение амплитуды соответствует её движению

$$E_0 \frac{ct - R}{Rc^2 t^2 - R^2 ct} = \frac{E_0}{Rct}$$

С другой стороны –

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dE}{dr} = -\frac{E_0}{ct^2} \frac{dt}{dr} = -\frac{E_0}{ct^2} \frac{1}{v}$$

$$v = -\frac{E_0}{ct^2} \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = -\frac{E_0 Rct}{ct^2 E_0} = -\frac{R}{t} = -\frac{Rc}{r}$$

$$dv = \frac{Rc}{r^2} dr \tag{9}$$

Из полученных выражений следует, что уменьшение амплитуды фронта сферической волны (dE) (который в соответствии с принципом Гюйгенса служит источником вторичных волн) эквивалентно (по отношению к определяющему параметру φ) движению этого фронта со скоростью v в направлении противоположном распространению волны [10]. В этой связи следует учитывать эффект Доплера

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1+v/c)}$$

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \frac{\omega_0}{\gamma(1+v/c)} - \omega_0 \approx$$

$$\approx \omega_0 - \omega_0 - \omega_0 v/c = -\frac{\omega_0}{c} v$$

Или в дифференциальной форме

$$d\omega = -\frac{\omega}{c} dv$$

С учётом (9)

$$d\omega = -\frac{\omega Rc}{c r^2} dr = -\omega R \frac{dr}{r^2}.$$

$$\frac{d\omega}{\omega} = -R \frac{dr}{r^2}, \ln \omega \Big|_{\omega_0}^{\omega} = \frac{R}{r} \Big|_R^r,$$

$$\ln \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{R}{r} - 1, \omega = \omega_0 e^{\frac{R}{r}-1}. \quad (10)$$

Полученная формула имеет сходство с (3), действительно,

$$\omega = \omega_0 e^{\frac{R}{r}-1} = \omega_0 e^{\frac{1}{r}(R-r)} = \omega_0 e^{\frac{c}{r}(\tau-t)}.$$

$$r = R \Rightarrow \omega = \omega_0, \quad r \rightarrow \infty \Rightarrow \omega \rightarrow \frac{\omega_0}{e}.$$

Выражение (10) – третья формула воспринимаемой частоты сферической волны.

Заключение

Выражения для частоты сферической волны (3), (5), (10), полученные на основе различных математических моделей, заметно различаются.

Формула (3) имеет исключительно методическое значение, которое трудно переоценить. Она и её вывод наиболее наглядно демонстрируют механизм уменьшения воспринимаемой частоты в силу особенностей спектра сферической волны. Для практических расчётов формула (3) не приемлема, поскольку входящую в нее константу C теоретически определить не представляется возможным.

Выражение (5) получено на основе формально-математического подхода без введения каких-либо допущений. В отличие от широко распространённых экспоненциальных зависимостей, которые вполне наглядно описывают процессы, конструкция формулы (5) лишена какой-либо наглядности, представить по её виду характер протекания процесса весьма проблематично. В то же время её точность не вызывает сомнений.

Формула (10) является результатом подхода, более соответствующего инженерному. На её достаточно удобный для анализа и наглядного представления вид оказало влияние допущение о соответствии *уменьшения* амплитуды фронта сферической волны его движению в направлении противоположном распространению волны. Это допущение вполне себя оправдало, что, в частности, следует из существенного сходства выражений (3) и (10).

Указанные особенности формул (3), (5), (10) определяют условные границы их применимости. Выражение (3) полезно для понимания физического смысла феномена уменьшения воспринимаемой частоты сферической волны. Формула (10) удобна для инженерных расчётов и даёт наилучшее наглядное представление о динамике изменения частоты. Выражение (5) лучше всего подходит для верификации практических вычислений, в том числе, оценки их погрешностей.

Воспринимаемая частота сферической волны в любом случае меньше исходной частоты излучения и уменьшается по мере удаления от источника, что обусловливается математическими особенностями спектра сферической волны.

Воспринимаемая частота сферической волны в любом случае меньше исходной частоты излучения и уменьшается по мере удаления от источника, что обусловливается математическими особенностями спектра сферической волны.

Литература

1. Попов И.П. Комбинированные векторы и магнитный заряд // Прикладная физика и математика. 2018. № 6. С. 12–20.
2. Попов И.П. Mathematical modeling of the formal analogy of electromagnetic field // Applied mathematics and control sciences. 2016. No. 4. Pp. 36–60.
3. Попов И.П. Построение абстрактной модели силового поля типа электромагнитного. Часть 2 // Наука. Инновации. Технологии. 2015. № 3. С. 63–78.
4. Попов И.П. Роль псевдовекторов в математическом моделировании формального аналога электромагнитного поля // Вестник Псковского государственного университета. Естественные и физико-математические науки. 2016. Вып. 8. С. 110–127.
5. Попов И.П. Some restrictions of Fourier integral // Applied mathematics and control sciences. 2015. No. 1. Pp. 19–25.
6. Попов И.П. The Fourier integral and discrete spectrums // Software of systems in the industrial and social fields, No. 7 (2). Pp. 9–12
7. Yamamoto S. On the theory of some nonlinear operators // Yokohama math. J. 1962. Vol. 10. Pp. 11–17.
8. Chen Z.N., Qing X., Shi J., Nasimuddin, Liu W. Metamaterial-based antennas: Engineering designs //

Proc. of the Asia-Pacific Microwave Conference (APMC). Nan-jing, IEEE. 2015. Vol. 1. Pp. 1–3.

9. *Gitin A.V.* A simple proof of Damien's theorem and duality in theory of the zero-distance phase front //

Поступила 24 мая 2019 г.

International J. of Antennas and Propagation. 2015. Vol. 2015. DOI: 10.1155/2015/478580.

10. *Попов И.П.* Фиксация скорости радиоволн // Двойные технологии. 2019. № 1 (86). С. 68–70.

English

FREQUENCY DEVIATION OF SPHERICAL WAVES

Popov Igor Pavlovich – Senior Lecturer, Kurgan State University.

E-mail: ip.popow@yandex.ru.

Address: 640020, Russia, Kurgan, Sovetskaya str., 63/4.

Abstract: It is found that electromagnetic wave frequency received by the receiver does not always coincide with emission frequency. The electromagnetic wave emitted by an isolated point source is spherical. This is an amplitude-modulated wave. Thus, it is not monochromatic, which results in mismatch of emitted and received frequencies. Three formulas for spherical wave frequency are derived based on various mathematical models. The first formula is of methodological significance. It and its derivation clearly demonstrate the mechanism of reducing the received frequency due to spectral features of spherical wave. The first formula is inappropriate for practical calculations because of indefinability of invariable which is a part of it. The second formula is derived based on formal mathematical approach without introducing any assumptions. The second formula is devoid of any visualization and to conceive the nature of undergoing process by its form is very problematic unlike the case with widespread exponential dependencies, which quite clearly describe processes. At the same time, its accuracy is in no doubt. The third formula is the result of approach that is more similar to an engineering one. Its form, which is quite convenient for analysis and visual representation, was influenced by the assumption that amplitude attenuation of spherical wavefront corresponds to its movement in the direction opposite to wave propagation. Peculiar features of formulas define conventional limits of their applicability. The first formula is useful to understand the physical meaning of the phenomenon of reducing the perceived frequency of spherical wave. The third formula is convenient for engineering calculations and it provides the best visual representation of frequency dynamic pattern. The second formula is best suited for verification of practical calculations, including estimation of their errors. The perceived frequency of spherical wave is at any event less than original emission frequency and becomes less with increasing distance from the source.

Keywords: source, receiver, emission, wave, frequency, spectrum.

References

1. *Popov I.P.* Combining vectors and magnetic charge. Applied Physics and Mathematics. 2018. No. 6. Pp. 12–20.
2. *Popov I.P.* Mathematical modeling of the formal analogy of electromagnetic field. Applied mathematics and control sciences. 2016. No. 4. Pp. 36–60.
3. *Popov I.P.* Abstract model construction of force field sort of like an electromagnetic one. Part 2. Science. Innovations. Technologies. 2015. No. 3. Pp. 63–78.
4. *Popov I.P.* The role of pseudovectors in mathematical modeling of formal analog of electromagnetic field. Bulletin of Pskov State University. Natural and Physical-mathematical Sciences. 2016. Vol. 8. Pp. 110–127.
5. *Popov I.P.* Some restrictions of Fourier integral. Applied mathematics and control sciences. 2015. No. 1. Pp. 19–25.
6. *Popov I.P.* The Fourier integral and discrete spectrums. Software of systems in the industrial and social fields, No. 7 (2). Pp. 9–12
7. *Yamamoto S.* On the theory of some nonlinear operators. Yokohama math. J. 1962. Vol. 10. Pp. 11–17.
8. *Chen Z.N., Qing X., Shi J., Nasimuddin, Liu W.* Metamaterial-based antennas: Engineering designs. Proc. of the Asia-Pacific Microwave Conference (APMC). Nan-jing, IEEE. 2015. Vol. 1. Pp. 1–3.
9. *Gitin A.V.* A simple proof of Damien's theorem and duality in theory of the zero-distance phase front. International J. of Antennas and Propagation. 2015. Vol. 2015. DOI: 10.1155/2015/478580.
10. *Popov I.P.* Fixation of radio wave speed. Dual Technologies. 2019. No. 1 (86). Pp. 68–70.