

# Системы, сети и устройства телекоммуникаций

УДК 621.391; УДК 519.216

## ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИКЛОСТАЦИОНАРНОГО ОПИСАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ПРИМЕРЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСОВ СО СЛУЧАЙНЫМИ АМПЛИТУДАМИ

**Шевгунов Тимофей Яковлевич**

кандидат технических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

*E-mail:* shevgunov@gmail.com.

*Адрес:* 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

*Аннотация:* Объектом исследования выступают радиотехнические сигналы, являющиеся реализациями специального класса нестационарных случайных процессов, а именно: циклоstationарных (ЦС), или периодически коррелированных в широком смысле. В статье рассмотрены основные характеристики вероятностного описания свойств ЦС случайных процессов с нулевым средним во временной и частотной области: двумерная корреляционная функция, циклическая корреляционная функция (ЦКФ), спектральная корреляционная функция. Для каждой из характеристик найдены компактные аналитические выражения на примере последовательности импульсов со случайными амплитудами. Определена связь между одномерной корреляционной функцией, используемой для описания стационарного случайного процесса, и нулевой компонентой циклической корреляционной функции. Показано, что типичные сигналы, используемые при передаче цифровых сообщений, содержат существенные нестационарные компоненты, соответствующие ненулевым циклическим частотам. Дополнительная информация, содержащаяся в них, может быть использована при построении новых алгоритмов обработки сигналов в системах передачи информации, пассивной радиолокации и проектировании систем управления.

*Ключевые слова:* циклоstationарность, циклоstationарные случайные процессы, периодически коррелированные случайные процессы, спектральная корреляционная функция, стационаризация.

### Введение

Развитие аппаратной архитектуры и значительный рост производительности вычислительных систем обусловил увеличение интереса со стороны исследователей и инженеров к методам цифровой обработки сигналов, основанных на моделях их представления в виде реализаций нестационарных случайных процессов. Одна из когнитивных трудностей перехода к нестационарным моделям состоит в необходимости пересмотра основных понятий и характеристик, разработанных Н. Винером [1] и А.Я. Хинчиным [2] в 30-х годах XX века. Такой пересмотр может привести к отказу от использования одномерных корреляционных функций как характеристик второго порядка при описании статистических свойств процес-

сов. Однако, существует и другой путь, состоящий в использовании теории циклоstationарных процессов, в рамках которой происходит развитие и обобщение привычных понятий, используемых при описании стационарных случайных процессов.

Настоящая работа представляет краткое введение в основные понятия теории циклоstationарных случайных процессов и основные характеристики циклоstationарных случайных сигналов, проиллюстрированные на простом примере – случайном процессе, представляющем собой последовательность прямоугольных импульсов со случайными амплитудами. Процессы такого типа лежат в основе современных систем цифровой передачи информации, представляя, в общем случае, сиг-

налы физического уровня проводных каналов связи и комплексные огибающие сигналов физического уровня в беспроводных системах, использующих различные виды модуляций [3].

Важно отметить, что, хотя выбранный пример был упомянут в различных работах на протяжении более шестидесяти лет развития циклоstationарного подхода, начиная с пионерской работы [4], и не был обойдён вниманием в известной монографии Л. Френкса [5], его исчерпывающего и ясного анализа представлено не было. В относительно недавней работе французского исследователя Ж. Антони [6] («Циклоstationарность на примерах») даётся обширное иллюстрированное введение в циклоstationарный анализ на примерах сигналов, взятых из практики, что представляет безусловный интерес для читателей уже хорошо знакомых с понятиями и имеющих ясное представление о том, какую полезную информацию можно получить из графиков основных характеристик циклоstationарного описания. Напротив, в настоящей статье приводится пример, построенный исключительно в рамках теоретико-вероятностной модели известного процесса, и не затрагивается широкий круг вопросов, связанных с задачами оценки характеристик по длинным измеренным реализациям случайных процессов, как правило, наблюдаемых в присутствии помех. Читателям, более заинтересованным вопросами оценивания, помимо работы [6] автор может рекомендовать работы [7, 8].

Несмотря на то, что статья [9] российского ученого Е.Г. Гладышева, опубликованная в начале 60-х годов XX века и переведённая на английский язык, оказала существенное влияние на все последующие зарубежные исследования в данном направлении, в современной отечественной научной литературе теория циклоstationарных случайных процессов освещена довольно слабо. Следствием этого является отсутствие устоявшейся терминологии. Однако, в силу того, что циклоstationарный подход является естественным расширением широко применяемого stationарного подхода,

автор полагает обоснованным расширение терминов, определённых в [10], на свойства циклоstationарных процессов и характеристики их описания с добавлением для свойств прилагательного *циклоstationарный (ЦС)*, а для характеристик – прилагательного *циклический (Ц)*.

В настоящей работе на выбранном простом примере последовательно рассматриваются основные характеристики его представления в рамках циклоstationарного подхода: двумерная корреляционная функция (ДКФ), циклическая корреляционная функция (ЦКФ) и спектральная корреляционная функция (СКФ). Для двух последних даются альтернативные представления в форме спектральных плотностей. Также поясняется переход от двумерной к одномерной корреляционной функции при выполнении stationаризации случайного процесса.

## 2. Двумерная корреляционная функция

Рассмотрим случайный процесс  $x(t)$ , представляющий собой бесконечную последовательность прямоугольных импульсов с шириной  $\Delta$ , следующих с постоянным периодом  $T$ , в которой амплитуда каждого импульса представляет собой случайную величину, принимающую значения из множества  $\{-A, A\}$  с равной вероятностью. Положим, что амплитуды различных импульсов суть независимые случайные величины, заданные на одном и том же вероятностном пространстве. Типичная реализация процесса представлена на рис. 1 при  $T = 2\Delta$ .

Формально процесс  $x(t)$  можно записать так:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_m g(t - mT), \quad (1)$$

где  $T$  – период ( $T > 0$ );  $X_m$  – амплитуда  $m$ -го импульса – случайная величина принимающая равновероятно значения  $-A$  или  $A$ ;  $g(t)$  – функция, определяющая форму одного периода, выбранная в примере прямоугольным импульсом, симметричным относительно нуля:

$$g(t) = \text{rect}(t/\Delta), \quad (2)$$

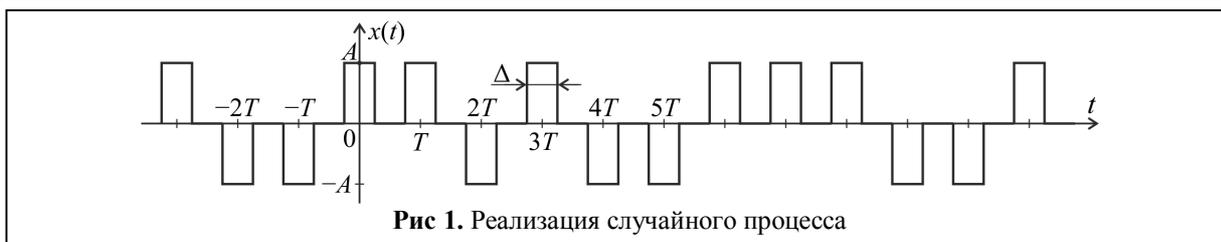


Рис 1. Реализация случайного процесса

где  $\Delta$  – ширина импульса ( $\Delta > 0$ ). Будем полагать, что ширина импульса не превышает периода повторения последовательности:  $\Delta \leq T$ .

Из равенства нулю математического ожидания амплитуд:  $\mathbb{M}[X_m] = 0$  следует, что математическое ожидание случайного процесса равно нулю в любой момент времени

$$\forall t: \mathbb{M}[x(t)] = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbb{M}[\bullet]$  обозначает оператор вероятностного усреднения по множеству всех возможных реализаций процесса.

Рассмотрим теперь корреляционную функцию (КФ)  $R_x(t_1, t_2)$  процесса  $x(t)$ , определенную, в соответствии с общим выражением [11]:

$$R_x(t_1, t_2) = \mathbb{M}[x(t_1)x(t_2)], \quad (4)$$

где  $t_1$  и  $t_2$  – два независимых момента времени. Формальная подстановка (1) в (4) с учётом независимости амплитуд различных импульсов  $\mathbb{M}[X_m X_n] = 0, m \neq n$  и равенства нулю их среднего  $\mathbb{M}[X_m] = 0$  даёт

$$R_x(t_1, t_2) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A^2 g(t_1 - mT)g(t_2 - mT). \quad (5)$$

Произведение  $g(t_1)g(t_2)$  для выбранной формы (2) прямоугольного импульса вычисляется непосредственно

$$g(t_1)g(t_2) = \text{rect}\left(\frac{t_1}{\Delta}\right)\text{rect}\left(\frac{t_2}{\Delta}\right) = \begin{cases} 1, & (|t_1| < 0,5\Delta) \wedge (|t_2| < 0,5\Delta); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (6)$$

и представляет собой трёхмерное тело, изображенное на рис. 2. Выбранный в рассматриваемом примере прямоугольный импульс  $g(t)$  определяет резкие границы двумерной области

– носителя произведения  $g(t_1)g(t_2)$  на плоскости  $(t_1, t_2)$ .

При иллюстрации КФ вместо трёхмерного графика, как это выполнено на рис. 2, оказывается более практичным использовать двумерную диаграмму, заданную на плоскости  $(t_1, t_2)$ , где интенсивность закрашки будет пропорциональна значению корреляционной функции. КФ рассматриваемого процесса (5) в виде такой диаграммы представлена на рис. 3 (а).

Как можно увидеть на диаграмме на рис. 3 (а), на плоскости  $(t_2, t_1)$  сформированы квадраты, следующие периодически вдоль главной диагонали  $t_1 = t_2$ . Внутри квадратов значение КФ равно  $A^2$ , в то время как вне их оно равно нулю. Резкие границы областей выраженной корреляции полностью обусловлены выбором функции  $g(t)$  в соответствии с выражением (2). Заметим, что на трёхмерном графике эти квадраты были бы основаниями прямоугольных параллелепипедов, подобных изображённому на рис. 2, высота каждого параллелепипеда равна  $A^2$ .

Рис. 3 (а) также ясно иллюстрирует двумерную периодичность – характерное свойство КФ рассматриваемого процесса:

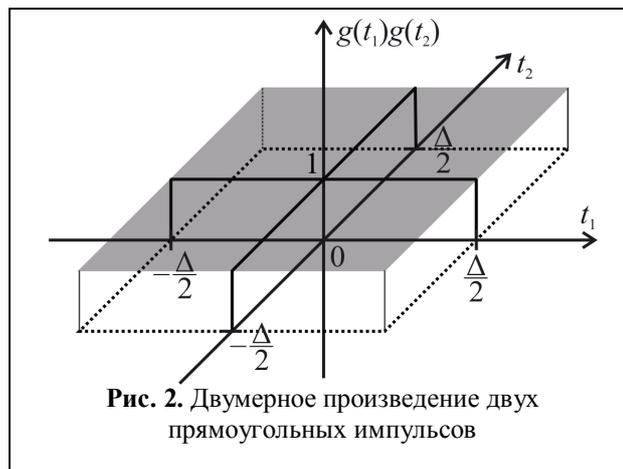
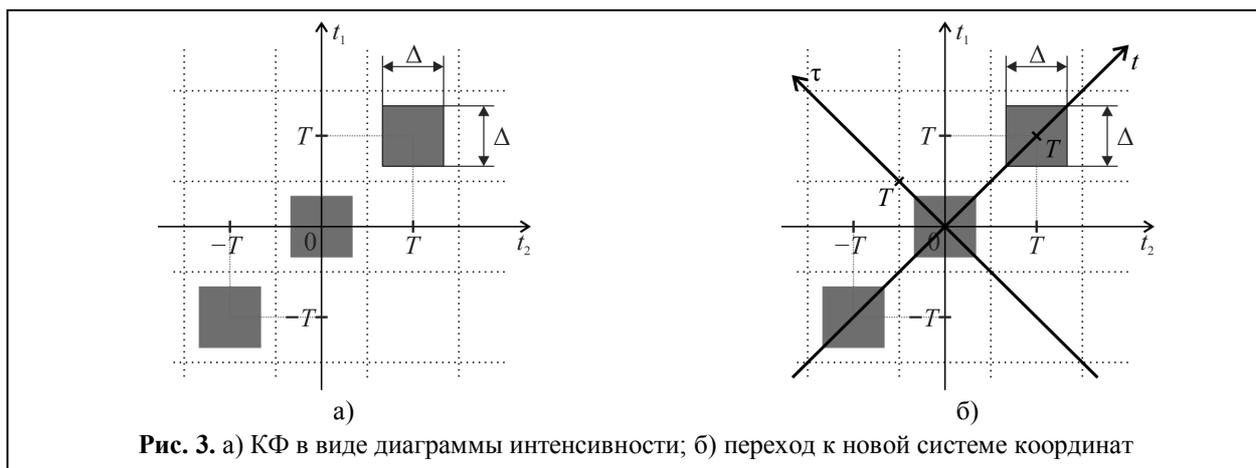


Рис. 2. Двумерное произведение двух прямоугольных импульсов



$$R_x(t_1 + T, t_2 + T) = R_x(t_1, t_2), \quad (7)$$

где следует обратить внимание на то, что оба аргумента  $-t_1$  и  $t_2$  – получают одинаковое смещение  $T$ .

КФ функцию можно переписать в виде функции двух переменных, но такой, что функция будет периодической только по одной из них. Для этого проведём следующее преобразование координат:

$$t = (t_1 + t_2)/2, \quad \tau = t_1 - t_2, \quad (8)$$

где переменная  $t$  интерпретируется как текущее время, а  $\tau$  – относительное время, или временной сдвиг. Используя обратную к (8) подстановку:

$$t_1 = t + \tau/2, \quad t_2 = t - \tau/2, \quad (9)$$

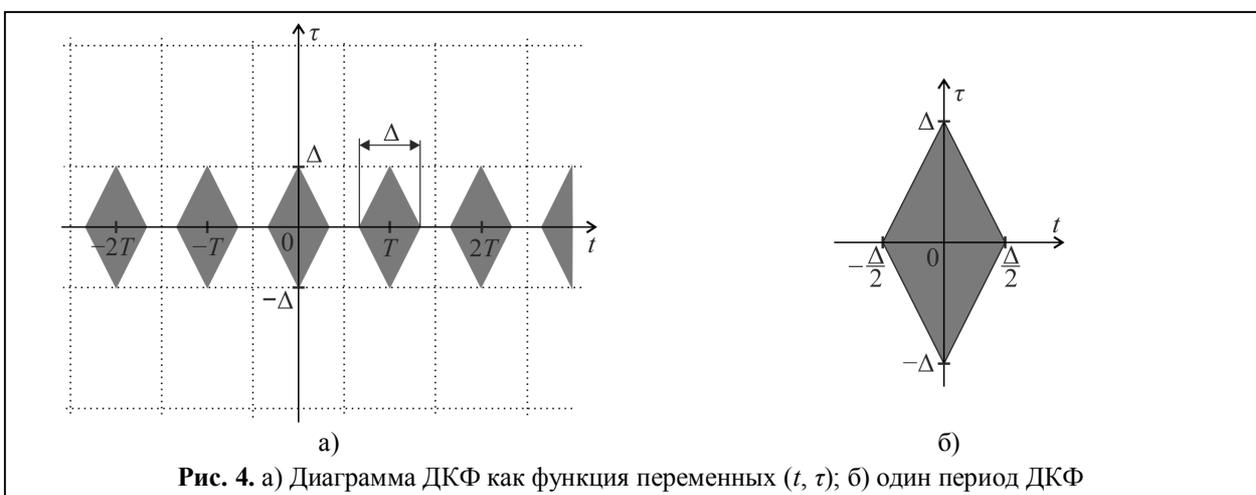
можно получить выражение для *двумерной корреляционной функции* (ДКФ) как функции от пары аргументов  $(t, \tau)$ :

$$\mathcal{R}_x(t, \tau) = R_x(t + \tau/2, t - \tau/2) =$$

$$= [x(t + \tau/2)x(t - \tau/2)]. \quad (10)$$

Для рассматриваемого примера с прямоугольными импульсами, результат преобразования нетрудно получить графически, если прочертить оси новой системы, как показано на рис. 3 (б): диагональ  $t_2 = t_1$  на диаграмме станет осью  $t$  новой системы координат  $(t, \tau)$ , а перпендикулярная ей диагональ  $t_2 = -t_1$  станет осью  $\tau$ . На рис. 4 (а) представлен график ДКФ, где следует заметить, что фигуры в новой системе координат претерпевают сжатие вдоль оси  $t$  в  $\sqrt{2}$  и растяжение в  $\sqrt{2}$  вдоль оси  $\tau$ . Отметим здесь, что якобиан преобразования координат (8) постоянен и равен единице, что существенно упрощает переход от КФ  $R_x(t_1, t_2)$  (4) к ДКФ  $\mathcal{R}_x(t, \tau)$  в ряде преобразований.

Из преобразования координат (8) с учётом периодичности (7) следует, что рассматриваемое



мая функция  $\mathcal{R}_x(t, \tau)$  является периодической функцией только по переменной текущего времени  $t$ , но не по переменной сдвига  $\tau$ :

$$\mathcal{R}_x(t + T, \tau) = \mathcal{R}_x(t, \tau) \quad (11)$$

и формально может быть записана так:

$$\mathcal{R}_x(t, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_{x_0}(t - mT, \tau), \quad (12)$$

где  $\mathcal{R}_{x_0}(t, \tau)$  соответствует одному периоду повторения ДКФ и вычисляется на основе известной функции  $g(t)$ :

$$\mathcal{R}_{x_0}(t, \tau) = \begin{cases} A^2, & 2|t| + |\tau| < \Delta; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (13)$$

Носитель  $\mathcal{R}_{x_0}(t, \tau)$  имеет вид ромба, диагонали которого совпадают с координатными осями  $t$  и  $\tau$ , и представлен на рис. 4 (б).

Как следует из выражения (12) и рис. 4 (а) ДКФ зависит от  $t$ , что не позволяет считать рассматриваемый случайный процесс  $x(t)$  *стационарным* в широком смысле. Однако характер изменения ДКФ позволяет утверждать, что нестационарность оказывается описываемой детерминированными зависимостями. Периодический или циклический характер изменения ДКФ определил название для таких процессов, как рассматриваемый  $x(t)$ , – *периодически-коррелированные* случайные процессы [9], или *цикlostационарные* случайные процессы [5].

Рассматриваемый случайный процесс  $x(t)$  является цикlostационарным процессом второго порядка. Заметим, что в том случае, если математическое ожидание  $\mathbb{M}[x(t)]$  было бы не нулевым, но представляло бы собой постоянную величину или периодическое колебание, то процесс проявлял бы наряду с цикlostационарностью второго порядка и цикlostационарность первого порядка. В том случае, когда случайный процесс может быть вполне описан своим периодическим математическим ожиданием и периодической ДКФ, будем говорить, что он является *цикlostационарным в широком смысле* случайным процессом [3].

В литературе [12] часто можно найти аль-

тернативный выбор текущего времени  $t$ , в качестве него может выбираться конечный момент времени  $t_1$ , начальный момент времени  $t_2$  или, в самом общем случае, любой момент времени между ними. Тем не менее, определение  $t$  в соответствии с формулами (8) и (9) обеспечивает симметрию получаемых выражений, что часто заметно упрощает их аналитический вывод [13] и интерпретацию.

### 3. Связь двумерной и одномерной (стационарной) КФ

Классическая одномерная КФ, характеризующая стационарный процесс, является функцией одной переменной – сдвига  $\tau$ . Она может быть получена [14] из ДКФ усреднением по одному периоду  $t$ :

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_T \mathcal{R}_x(t, \tau) dt, \quad (14)$$

где форма записи обозначает интегрирование по периоду, т.е. по любому непрерывному интервалу  $[t_0, t_0+T)$ : обычно при непосредственном вычислении выбирают пределы интегрирования от 0 до  $T$  или от  $-T/2$  до  $+T/2$ .

Одно из возможных действий над процессом  $x(t)$ , приводящее к преобразованию ДКФ (14), известно как *стационаризация* случайного процесса [15]. Фактически это преобразование можно проиллюстрировать переходом к другому случайному процессу  $y(t)$ , получаемому из  $x(t)$  случайным сдвигом:

$$y(t) = x(t + \theta), \quad (15)$$

где  $\theta$  – заданная на том же вероятностном пространстве, что и процесс  $x(t)$ , и независимая от него случайная величина с равномерной плотностью вероятности:

$$p_\theta(v) = T^{-1} \text{rect}(v/T). \quad (16)$$

Можно показать [16], что при каждом значении  $\theta$  ДКФ будет иметь такой же сдвиг по текущему времени  $t$ , как и сигнал:

$$x(t + \theta) \rightarrow \mathcal{R}_x(t + \theta, \tau). \quad (17)$$

Выполняя усреднение по  $\theta$  путём перехода к условному математическому ожиданию, нетрудно получить:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_\theta [\mathcal{R}_x(t + \theta, \tau)] = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_x(t + \nu, \tau) p_\theta(\nu) d\nu = \frac{1}{T} \int_{-0,5T}^{0,5T} \mathcal{R}_x(t, \tau) dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку, как было отмечено выше, интеграл по одному периоду периодической функции не зависит от выбранного при интегрировании начала периода, выражение (14) и конечный результат в (18) суть одно и то же.

Практический смысл стационаризации заключается в том, что при наблюдении процесса  $x(t)$  может иметь место случайный выбор стартовой точки – начала координат оси времени  $t$ . Говоря более строго, при наблюдении процесса  $x(t)$  с точностью до сдвига наблюдается другой процесс  $y(t)$ , который является стационаризованной версией исходного. Формальное выражение для усреднённой по периоду ДКФ (14) для рассматриваемого примера  $x(t)$  будет получено далее в составе более общего выражения.

#### 4. Циклическая корреляционная функция

Периодический характер ДКФ (11) позволяет представить её рядом Фурье относительно переменной текущего времени  $t$ :

$$\mathcal{R}_x(t, \tau) = \sum_{\alpha \in A} \mathcal{R}_x^{(\alpha)}(\tau) \exp(j2\pi\alpha t), \quad (19)$$

где  $\alpha$  – циклическая частота, параметр преобразования Фурье, в некотором смысле обратный текущему времени  $t$ ,  $A$  (альфа) – счётное множество значений  $\alpha$ , которое для периодической ДКФ состоит только из частот, кратных  $1/T$ :

$$A = \{\alpha : \alpha = k/T, k \in \mathbb{Z}\}. \quad (20)$$

Совокупность всех функций  $\{\mathcal{R}_x^{(\alpha)}(\tau), \alpha \in A\}$  составляет полное описание *циклической автокорреляционной функции* (ЦКФ) процесса. ЦКФ является частотным представлением ДКФ  $\mathcal{R}_x(t, \tau)$  примерно в том же смысле, в котором спектр Фурье является частотным представлением детерминированного, неслучайного, периодического сигнала. Фактически выражение (19) и представляет

собой хорошо известный ряд Фурье за тем условием, что его коэффициенты суть не числа, но функции, зависящие от другой переменной  $\tau$ . Каждая отдельная составляющая  $\mathcal{R}_x^{(\alpha)}(\tau)$  при выбранном значении  $\alpha$  представляет собой компоненту, или сечение, ЦКФ, и может быть вычислена прямым преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x^{(\alpha)}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T \mathcal{R}_x(t, \tau) \exp(-j2\pi\alpha t) dt, \\ \alpha = k/T, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (21)$$

Поясним вычисление ЦКФ на примере процесса  $x(t)$ , рассмотрев ДКФ как функцию одной переменной  $t$  при зафиксированном значении второй переменной  $\tau$ . При  $|\tau| < \Delta$  ДКФ  $\mathcal{R}_x(t, \tau)$  принимает вид последовательности следующих с периодом  $T$  прямоугольных импульсов с шириной, зависящей от зафиксированного значения  $\tau$ . В тех случаях, когда  $|\tau| > \Delta$ ,  $\mathcal{R}_x(t, \tau)$  равна нулю:

$$\mathcal{R}_x(t, \tau) = \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A^2 \text{rect}\left(\frac{t-mT}{\Delta-|\tau|}\right), & |\tau| < \Delta; \\ 0, & |\tau| > \Delta. \end{cases} \quad (22)$$

График  $\mathcal{R}_x(t, \tau)$  как функции  $t$  изображён на рис. 5.

Выражение (22) для  $\mathcal{R}_x(t, \tau)$  открывает возможность определить формальное выражение коэффициентов ряда Фурье (21) как коэффициентов ряда Фурье последовательности прямоугольных импульсов [11] с шириной  $(\Delta-|\tau|)$  и периодом следования  $T$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x^{(k/T)}(\tau) = \frac{A^2}{T} (\Delta - |\tau|) \times \\ \times \text{sinc}\left[\pi \frac{k}{T} (\Delta - |\tau|)\right], \quad |\tau| < \Delta, \end{aligned} \quad (23)$$

где индекс  $k/T$  в записи ЦКФ следует понимать как  $\alpha = k/T, k \in \mathbb{Z}$ . На рис. 6 изображены несколько сечений ЦКФ при  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  при  $\Delta = T/2$ .

Особое внимание следует обратить на компоненту при нулевой циклической частоте: непосредственная подстановка  $\alpha = 0$  в выраже-

ние (21) приводит к выражению (14), описывающему периодическое усреднение ДКФ, рассмотренное подробнее в предыдущем разделе. Конкретный вид  $\mathcal{R}_x^{(0)}(\tau)$  для рассматриваемого примера определяется подстановкой  $k = 0$  в выражение (23), что приводит к формуле:

$$R_x(\tau) = \mathcal{R}_x^{(0)}(\tau) = \frac{A^2}{T}(\Delta - |\tau|), \quad |\tau| < \Delta, \quad (24)$$

описывающей симметричный импульс треугольной формы, заданный как функция  $\tau$ . Этот результат есть не что иное, как хорошо известная [17] классическая одномерная КФ процесса  $x(t)$ . В частности, значение в нуле  $\mathcal{R}_x^{(0)}(0) = A^2 \Delta/T$  определяет среднюю мощность процесса  $x(t)$ .

Для значений индекса  $k \neq 0$  формула (21) после упрощения приобретает вид:

$$R_x^{(k/T)}(\tau) = \frac{A^2}{\pi k} \sin \left[ \pi \frac{k}{T} (\Delta - |\tau|) \right], \quad |\tau| < \Delta, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (25)$$

Все компоненты ЦКФ могут быть объединены в рамках одной функции, если выполнить переход от представления ДКФ  $\mathcal{R}_x(t, \tau)$  рядом Фурье (19) с коэффициентами  $R_x^{(\alpha)}(\tau)$  (21) к её представлению спектральной плотностью  $R_x(\alpha, \tau)$  – функцией двух действительных переменных. Выполняя формально преобразование Фурье выражения (19), от ЦКФ можно перейти к *циклической корреляционной плотности (ЦКП)*, функции непрерывной циклической частоты  $\alpha$ :

$$\mathcal{R}_x(\alpha, \tau) = \sum_{\beta \in \mathbb{A}} R_x^{(\beta)}(\tau) \delta(\alpha - \beta), \quad (26)$$

где в роли индекса для записи суммы используется переменная  $\beta$ , поскольку переменная  $\alpha$  выбрана в качестве аргумента функции.

Зависящие формально от одной переменной дельта-функции, входящие в запись функции двух переменных (26), представляют собой так называемые «дельта-стены» – распределения, сосредоточенные при  $\alpha = \beta$ , т.е. имеющие бесконечно малую про-

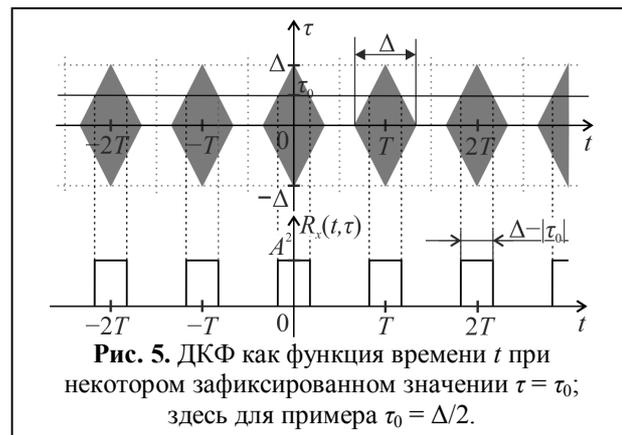


Рис. 5. ДКФ как функция времени  $t$  при некотором зафиксированном значении  $\tau = \tau_0$ ; здесь для примера  $\tau_0 = \Delta/2$ .

тяженность вдоль измерения, параллельного оси циклической частоты  $\alpha$ , но протяжённые вдоль измерения, параллельного оси переменной сдвига  $\tau$ .

Все компоненты ЦКФ рассматриваемого примера, представленные на рис. 6, можно также объединить в форме ЦКП и отобразить вместе на трёхмерном графике, например, так, как представлено на рис. 7.

### 5. Спектральная корреляционная функция

Как хорошо известно [11], для классической одномерной КФ  $R_x(\tau)$  посредством прямого преобразования Фурье устанавливается её представление в области частоты  $S_x(f)$ , называемое *спектральной плотностью мощности (СПМ)*:

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \quad (27)$$

Аналогичный переход можно выполнить для каждой из функций  $\mathcal{R}_x^{(\alpha)}(\tau)$ , составляющих ЦКФ, сформировав таким образом набор

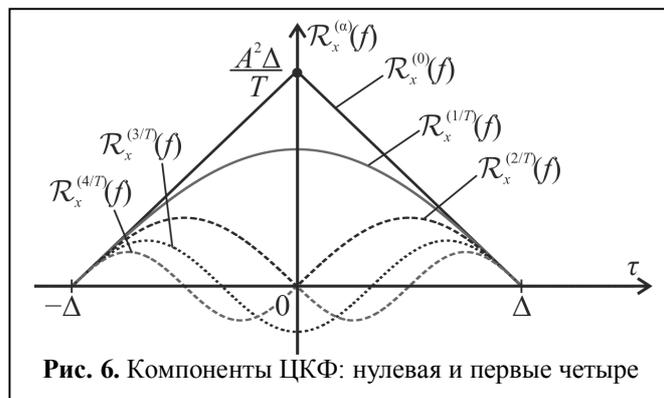


Рис. 6. Компоненты ЦКФ: нулевая и первые четыре

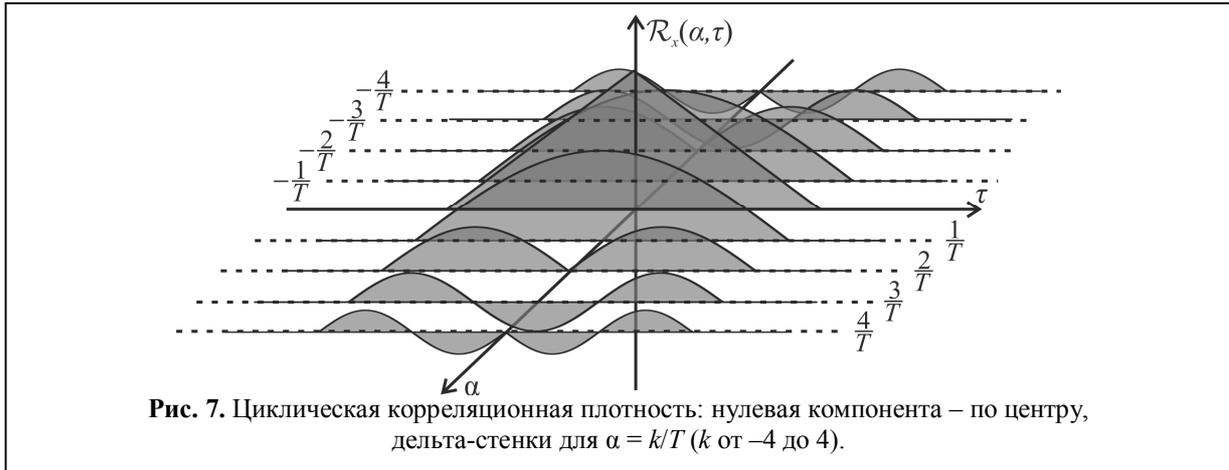


Рис. 7. Циклическая корреляционная плотность: нулевая компонента – по центру, дельта-стенки для  $\alpha = k/T$  ( $k$  от  $-4$  до  $4$ ).

функций  $S_x^{(\alpha)}(f)$ :

$$S_x^{(\alpha)}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x^{(\alpha)}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \quad (28)$$

Множество всех отличных от нуля  $\{S_x^{(\alpha)}(f)\}$  составляет спектральную корреляционную функцию (СКФ), или циклическую спектральную плотность мощности (ЦСПМ).

Компоненты  $\{S_x^{(\alpha)}(f)\}$  обеспечивают для компонент ЦКФ  $\{R_x^{(\alpha)}(f)\}$  эквивалентное спектральное представление, которое будет двухчастотным (биспектральным) поскольку как параметр  $\alpha$ , используемый в преобразовании (21), так и аргумент функции  $f$ , используемый в преобразовании (28), суть некоторые частоты.

Для рассматриваемого примера преобразо-

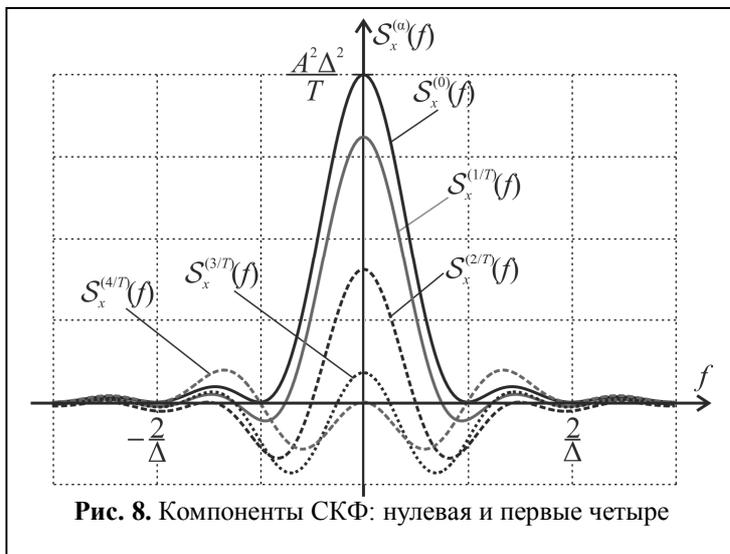


Рис. 8. Компоненты СКФ: нулевая и первые четыре

вания Фурье (28) компонента ЦКФ (23) может быть найдена в аналитической форме. Такой вывод является трудоёмким, но не имеет принципиальных аналитических сложностей, а окончательное выражение в наиболее продуктивной форме имеет вид:

$$S_x^{(k/T)}(f) = A^2 \Delta^2 T^{-1} \text{sinc}[\pi(f - k/(2T))\Delta] \times \text{sinc}[\pi(f + k/(2T))\Delta]. \quad (29)$$

Частный случай  $\alpha = 0$  соответствует классической СПМ (27), выражение для которой принимает вид:

$$S_x(f) = S_x^{(0)}(f) = A^2 \Delta^2 T^{-1} \text{sinc}^2(\pi f \Delta), \quad (30)$$

что соответствует преобразованию Фурье симметричного треугольного импульса.

Несколько первых сечений  $S_x^{(\alpha)}(f)$  при  $\alpha = k/T$  для случая  $\Delta = T/2$  представлено на рис. 8.

Используя те же рассуждения, которые были выполнены в предыдущем подразделе при переходе от записи ЦКФ в виде совокупности компонент к форме в виде ЦКП, представим СКФ  $\{S_x^{(\alpha)}(f)\}$  в виде функции двух вещественных переменных – спектральной корреляционной плотности (СКП):

$$S_x(f, \alpha) = \sum_{\beta \in A} S_x^{(\beta)}(f) \delta(\alpha - \beta). \quad (31)$$

Для процесса, рассматриваемого в настоящей работе в качестве примера,

трёхмерный график СКП представлен на рис. 9.

### 6. Заключение

Представленный в настоящей работе пример анализа простого и хорошо известного случайного процесса иллюстрирует систематическое опре-

деление основных характеристик циклостационарного представления нестационарных случайных процессов, а выбранная прямоугольная форма импульса позволила получить запись всех характеристик в форме аналитических выражений. В общем случае, для произвольной формы импульса, интегральные преобразования могут не иметь записей в виде элементарных функций, в этом случае искомые характеристики могут быть рассчитаны численным интегрированием.

Отдельный практический интерес представляют единицы измерения описанных выше характеристик, позволяющие раскрыть их физический смысл и прояснить различие между парами: ЦКФ и ЦКП, СКФ и СКП. Для этого положим, что случайный процесс  $x(t)$  измеряется в единицах напряжения – [В], а время измеряется в [с]. Тогда его КФ и ДКФ, определённые с использованием выражений (4) и (10) соответственно, будут измеряться в единицах приведённой, или сигнальной, мощности [В<sup>2</sup>]. В соответствии с определением коэффициентов ряда Фурье (21) сечения ЦКФ  $\mathcal{R}_x^{(\alpha)}(\tau)$  будут измеряться в тех же единицах, что и ДКФ – [В<sup>2</sup>], а ЦКП  $\mathcal{R}_x(\alpha, \tau)$  будет измеряться в [В<sup>2</sup>/Гц]. Компоненты СКФ  $\mathcal{S}_x^{(\alpha)}(\tau)$  будут измеряться в тех же единицах, в которых измеряется СПМ, а именно: [В<sup>2</sup>/Гц], или [В<sup>2</sup>с]. Наконец, СКП  $\mathcal{S}_x(\alpha, \tau)$ , описывающая двумерное распределение плотности мощности на двух-

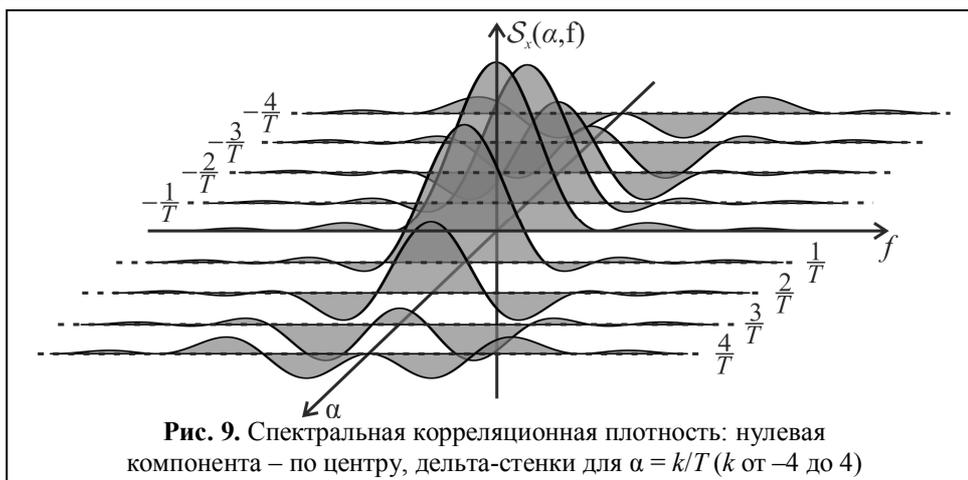


Рис. 9. Спектральная корреляционная плотность: нулевая компонента – по центру, дельта-стенки для  $\alpha = k/T$  ( $k$  от  $-4$  до  $4$ )

частотной плоскости, будет измеряться в [В<sup>2</sup>/Гц<sup>2</sup>].

Главным недостатком стандартного подхода к анализу последовательности импульсов со случайными амплитудами (1), описанного, например, в классическом учебном пособии [18], является то, что исследователи ограничиваются рассмотрением одномерной КФ, что неявно подразумевает под собой выполнение стационаризации (18). Это в свою очередь неизбежно приводит к отказу от использованию информации, содержащейся с сечениях  $\mathcal{R}_x^{(\alpha)}(\tau)$ ,  $\alpha \neq 0$ , которая может и должна учитываться при обработке сигналов с использованием алгоритмов, построенных с опорой на циклостационарные модели представления. Такие алгоритмы найдут своё применение в системах битовой синхронизации и синхронизации по несущей при цифровой передаче данных в условиях низкого отношения сигнал-шум, при высокоточном селективном определении местоположения источников электромагнитного излучения в распределённых пассивных радиолокационных системах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках государственного задания (проект № 8.8502.2017/БЧ).

### Литература

1. Wiener N. Generalized harmonic analysis // Acta Math. 1930. Vol. 55. Pp. 117–258.

2. Хинчин А.Я. Теория корреляции стационарных стохастических процессов // Успехи математических наук, 1938. № 5, С. 42–51. <http://mi.mathnet.ru/umn8952>.
3. Gardner W.A. Cyclostationarity in communications and signal processing. IEEE Press, 1994. 506 p.
4. Bennett W.R. Statistics of regenerative digital transmission // The Bell system technical journal. Vol. 37, No. 6. 1958. Pp. 1501–1542. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1958.tb01560.
5. Френкс Л. Теория сигналов. Пер. с англ. / Под ред. Д.Е. Вакмана. М.: Сов. Радио, 1974. 344 с.
6. Antoni J. Cyclostationarity by examples // Mechanical Systems and Signal Processing. 2009. Vol. 23, No. 4. Pp. 987–1036. DOI: 10.1016/j.ymssp.2008.10.010
7. Ефимов Е.Н., Шевгунов Т.Я., Кузнецов Ю.В. Оценка циклической спектральной плотности мощности инфокоммуникационных сигналов // Труды МАИ. 2017. № 97. С. 14.
8. Шевгунов Т.Я., Ефимов Е.Н., Жуков Д.М. Алгоритм 2N-БПФ для оценки циклической спектральной плотности мощности // Электросвязь. 2017. №6. С. 50–57.
9. Гладышев Е.Г. Периодически и почти-периодически коррелированные случайные процессы с непрерывным временем // Теория вероятностей и ее применения. Т. 8. Вып. 2. 1963. С. 184–189.
10. ГОСТ 21878-76. Случайные процессы и динамические системы. Термины и определения. М.: Издательство стандартов, 1976. 30 с.
11. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Дрофа. 2006. 720 с.
12. Izzo L., Napolitano A. Generalized Almost-Cyclostationary Signals // Advances in Imaging and Electron Physics. Vol. 135. 2005. Pp 103–223. DOI: 10.1016/S1076-5670(04)35003-2.
13. Шевгунов Т.Я., Ефимов Е.Н., Жуков Д.М. Симметричные и несимметричные формы двумерной автокорреляционной функции циклоstationарного случайного процесса // 73-я Международная конференция «Радиоэлектронные устройства и системы для инфокоммуникационных технологий» (REDS-2018). М.: МТУСИ. С. 105–109.
14. Gardner W.A., Franks L. Characterization of cyclostationary random signal processes // IEEE Transactions on Information Theory. Vol. 21. No. 1. 1975. Pp. 4–14. DOI: 10.1109/TIT.1975.1055338.
15. Gardner W.A. Stationarizable random processes // IEEE Transactions on Information Theory. Vol. 24, No. 1. 1978. Pp. 8–22 DOI: 10.1109/TIT.1978.1055820
16. Gardner W.A. The spectral correlation theory of cyclostationary time-series // Signal Processing. Vol. 11, No. 1. Elsevier, 1986. Pp. 13–36 DOI: 10.1016/0165-1684(86)90092-7
17. Хименко В.И. Случайные данные: структура и анализ. М.: Техносфера, 2018. 424 с.
18. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и её инженерные приложения. М.: Высшая школа, 2000. 383 с.

Поступила 27 марта 2019 г.

English

## KEY FEATURES OF CYCLOSTATIONARY DESCRIPTION OF RANDOM PROCESSES, THROUGH THE EXAMPLE OF PULSE STRING WITH RANDOM AMPLITUDES

**Timofey Yakovlevich Shevgunov** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Federal State-Funded Educational Institution of Higher Vocational Education "Moscow Aviation Institute (MAI) (National Research University)".

*E-mail:* shevgunov@gmail.com.

*Address:* 125993, Moscow, A-80, GSP-3, Volokolamsk highway, 4.

*Abstract:* The article examines time and frequency characteristics describing probabilistic properties of cyclostationary or periodically correlated random processes. Processes of this class are often investigated as processes with hidden periodicity because they combine structural periodicity with randomness in such a way that periodic elements cannot be reliably isolated using the Fourier transform applied directly to the time realization. The systematic derivation of analytical expressions for two-dimensional correlation function, cyclic correlation function (CCF) and spectral correlation function (SCF) is demonstrated through the example of common but important signal that has pronounced cyclostationary properties and is just a pulse sequence with binary amplitude modulation, random sequence. The concept of stationarization as a transformation of cyclostationary process performed by its random time shift is unfolded, which brings about stationary random process, for which a description using one-dimensional CF (correlation function) is sufficient due to averaging of all components at non-zero cyclic frequencies. CCF and SCF components at non-zero cyclic frequencies contain additional information for most radio signals, for example, for those used for digital data

transmission, and can be used to develop new algorithms for symbolic synchronization and carrier synchronization, as well as algorithms for selective detection and delay estimation to define location in passive radar detection. The paper also proposes an alternative CCF and SCF representation in the form of cyclic spectral densities, in which the transformation argument – cyclic frequency – is considered as a continuous variable.

**Keywords:** cyclostationarity, cyclostationary random processes, periodically correlated random processes, spectral correlation function, stationarization.

### References

1. *Wiener N.* Generalized harmonic analysis. *Acta Math.* 1930. Vol. 55. Pp. 117–258.
2. *Khinchin A.Ya.* Correlation theory of stationary stochastic processes. *Uspekhi matematicheskikh nauk.* 1938. No. 5. Pp. 42–51. <http://mi.mathnet.ru/um8952>.
3. *Gardner W.A.* Cyclostationarity in communications and signal processing. IEEE Press, 1994. 506 p.
4. *Bennett W.R.* Statistics of regenerative digital transmission. *The Bell system technical journal.* Vol. 37, No. 6. 1958. Pp. 1501–1542. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1958.tb01560.
5. *Franks L.* Signal theory. Transl. from Engl. Ed. by D. E. Vakman. Moscow: Sov. Radio, 1974. 344 p.
6. *Antoni J.* Cyclostationarity by examples. *Mechanical Systems and Signal Processing.* 2009. Vol. 23, No. 4. Pp. 987–1036. DOI: 10.1016/j.ymssp.2008.10.010.
7. *Efimov E. N., Shevgunov T. Ya., Kuznetsov Yu. V.* Evaluation of cyclic power spectral density of infocommunication signals. *Proceedings of Moscow Aviation Institute.* 2017. No. 97. P. 14.
8. *Shevgunov T.Ya., Efimov E.N., Zhukov D. M.* 2N-BPF algorithm to evaluate the cyclic spectral power density. *Telecommunications.* 2017. No. 6. Pp. 50–57.
9. *Gladyshev E.G.* Periodically and near periodically correlated random processes with continuous time. *Probability Theory and its application.* Vol. 8. Iss. 2. 1963. Pp. 184–189.
10. GOST 21878-76. Random processes and dynamic systems. Terms and definitions. Moscow: Izdatelstvo standartov, 1976. 30 p.
11. *Gonorovsky I.S.* Radio circuits and signals. Moscow: Drofa. 2006. 720 p.
12. *Izzo L., Napolitano A.* Generalized Almost-Cyclostationary Signals. *Advances in Imaging and Electron Physics.* Vol. 135. 2005. Pp 103–223. DOI: 10.1016/S1076-5670(04)35003-2.
13. *Shevgunov T.Ya., Efimov E.N., Zhukov D.M.* Symmetric and asymmetric forms of the two-dimensional autocorrelation function of cyclostationary random process. 73-th International Conference "Electronic devices and systems for the infocommunication technologies" (REDS-2018), Moscow, MTUCI. Pp. 105–109.
14. *Gardner W.A., Franks L.* Characterization of cyclostationary random signal processes. *IEEE Transactions on Information Theory.* Vol. 21. No. 1. 1975. Pp. 4–14. DOI: 10.1109/TIT.1975.1055338.
15. *Gardner W.A.* Stationarizable random processes. *IEEE Transactions on Information Theory.* Vol. 24, No. 1. 1978. Pp. 8–22 DOI: 10.1109/TIT.1978.1055820
16. *Gardner W.A.* The spectral correlation theory of cyclostationary time-series. *Signal Processing.* Vol. 11, No. 1. Elsevier, 1986. Pp. 13–36 DOI: 10.1016/0165-1684(86)90092-7.
17. *Khimenko V.I.* Random data: structure and analysis. Moscow: Technosphere, 2018. 424 p.
18. *Ventzel E.S., Ovcharov L.A.* Theory of random processes and its engineering applications. Moscow: Vysshaya shkola, 2000. 383 p.