УДК 004.383.8.032.26

Упрощение алгоритма расчета коэффициентов аппроксимации непрерывной кусочно-линейной функции с переменным шагом аппроксимации

Романов Д.Н., Макаров А.В.

Статья посвящена упрощению вычисления коэффициентов аппроксимации для непрерывных кусочно-линейных функций с переменным шагом аппроксимации. В общем случае коэффициенты аппроксимации рассчитываются с помощью матричных уравнений, что требует вычисления обратной матрицы. В статье предложен способ вычисления коэффициентов аппроксимации на основе свойств линейных функций, что существенно упрощает алгоритм вычисления коэффициентов аппроксимации, в том числе для функций с не фиксированным шагом аппроксимации.

Ключевые слова: Непрерывные кусочно-линейные функции, переменный шаг аппроксимации, коэффициенты аппроксимации, методы, быстрые алгоритмы, оптимизация.

Для представления произвольных сигналов и характеристик в цифровой форме требуется их преобразование в набор отсчетов. Это преобразование можно реализовать, в том числе, с помощью различных видов аппроксимации. Нелинейные виды аппроксимации обладают высокой точностью, но требуют для своей реализации больших вычислительных затрат или существенного объема памяти. Линейные виды аппроксимации имеют меньшую точность, но проще реализуемы с помощью цифровых устройств.

Непрерывные кусочно-линейные функции (НКЛФ) позволяют реализовать линейную аппроксимацию. Эти функции могут менять шаг аппроксимации, что позволяет увеличить точность, не меняя количества узлов аппроксимации. Узлы аппроксимации берутся чаще на участках с большей кривизной и реже на более линейных.

В общем случае НКЛФ имеет следующий вид [1]:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{N} K_n |t - t_n| ,$$

где n – номер отсчета, t_n – координата узла аппроксимации, K_n – коэффициент аппроксимации.

В общем случае коэффициенты аппроксимации определяются следующим образом:

$$[K] = [y] \cdot [T]^{-1},$$

где [y] – вектор значений функции в узлах аппроксимации,

$$[T] = \begin{bmatrix} |t_0 - t_0| & |t_0 - t_1| & \cdots & |t_0 - t_N| \\ |t_1 - t_0| & |t_1 - t_1| & \cdots & |t_1 - t_N| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |t_N - t_0| & |t_N - t_1| & \cdots & |t_N - t_N| \end{bmatrix}$$

Для примера рассмотрим пример аппроксимации функции по шести точкам. Значения функции приведены в таблице 1.

Таблица 1.

t_n	0	1	4	7	8	9
$F(t)$	0	0,5	1	0,5	0	0

Матрица Т для этого случае примет вид:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 8 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Так как матрица [T] является Теплицевой. Для расчета обратной матрицы, можно воспользоваться известными алгоритмами, например – Левинсона-Дарбина [2].

Обратная матрица имеет вид:

$$[T] = \begin{bmatrix} -0.444 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.056 \\ 0.5 & -0.667 & 0.167 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.167 & -0.333 & 0.167 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.167 & -0.667 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0.056 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.444 \end{bmatrix}$$

Вектор коэффициентов аппроксимации для этого случае имеет вид:

$$K = \begin{bmatrix} 0,25 \\ -0,167 \\ -0,167 \\ -0,167 \\ 0.25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

При большом количестве узлов аппроксимации матрица Т будет иметь большой порядок, что потребует существенных вычислительных затрат.

Однако сложностей с расчетом обратной матрицы можно избежать, если определять коэффициенты аппроксимации, опираясь на свойства линейных функций.

Функция (1) представляет собой сумму модулей линейных функций, поэтому для значений, приведенных в таблице 1, процесс получения аппроксимирующей функции представляет собой суммирование сдвинутых по горизонтальной оси модулей линейных функций.

Сформированная, таким образом, функция приведена на рис.1.

По аналогии с обобщенной НКЛФ [3], таблица коэффициентов аппроксимации для НКЛФ с изменяемым шагом аппроксимации приведена в таблице 2.

Таблица 2

Номер, n	Коэффициент, K_n
0	$\dfrac{y_1 - y_0}{2(t_1 - t_0)}$
1	$\dfrac{y_2 - y_1}{2(t_2 - t_1)} - \dfrac{y_1 - y_0}{2(t_1 - t_0)}$
2	$\dfrac{y_3 - y_2}{2(t_3 - t_2)} - \dfrac{y_2 - y_1}{2(t_2 - t_1)}$
3	$\dfrac{y_4 - y_3}{2(t_4 - t_3)} - \dfrac{y_3 - y_2}{2(t_3 - t_2)}$
4	$\dfrac{y_5 - y_4}{2(t_5 - t_4)} - \dfrac{y_4 - y_3}{2(t_4 - t_3)}$
5	$\dfrac{y_5 - y_4}{2(t_5 - t_4)}$

В этом случае общая формула для коэффициентов аппроксимации примет вид:

$$K_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{2(t_{n+1} - t_n)} - \frac{y_n - y_{n-1}}{2(t_n - t_{n-1})}, \qquad (2)$$

В случае, если y_n не определено, вместо него подставляется значение нуль.

Рассмотрим расчет коэффициентов аппроксимации для более сложной функции. Аппроксимируем с помощью дискретной НКЛФ синусоидальную функцию, по восьми точкам. Значения функции приведены в таблице 3.

Функция, аппроксимированная по узлам аппроксимации, представленным в таблице 3, приведена на рис. 2.

Таблица 3.

m	0	0.7	1.2	1.5
$\sin(t_n)$	0	0.644	0.932	0.997
m	1,642	1,942	2,442	3.142
$\sin(t_n)$	0.997	0.932	0.644	0

Полученное выражение (2) для нахождения коэффициентов аппроксимации дискретной непрерывной кусочно-линейной функции требует меньших вычислительных ресурсов и имеет более простой алгоритм вычислений.

Таким образом, НКЛФ с переменным шагом аппроксимации представляет собой

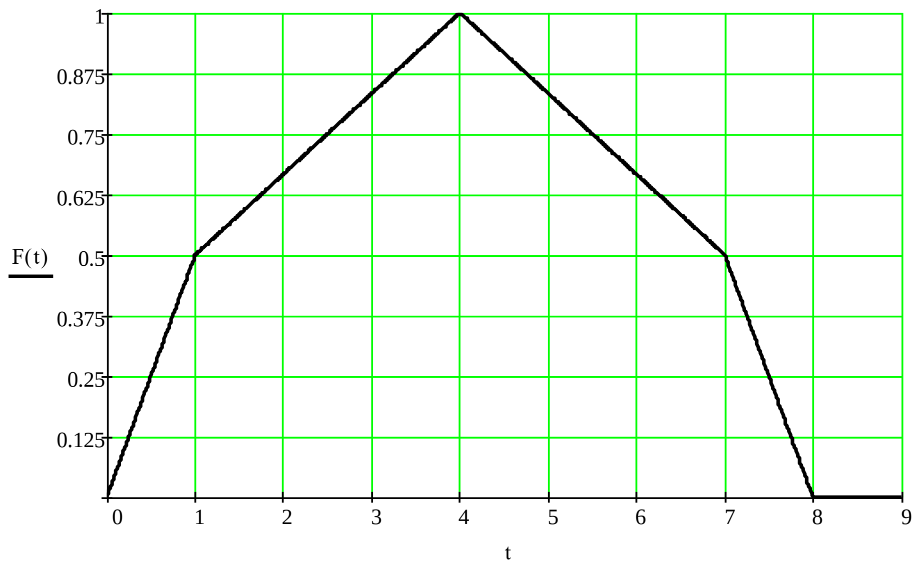

Рис. 1. – Функция, аппроксимированная по семи точкам

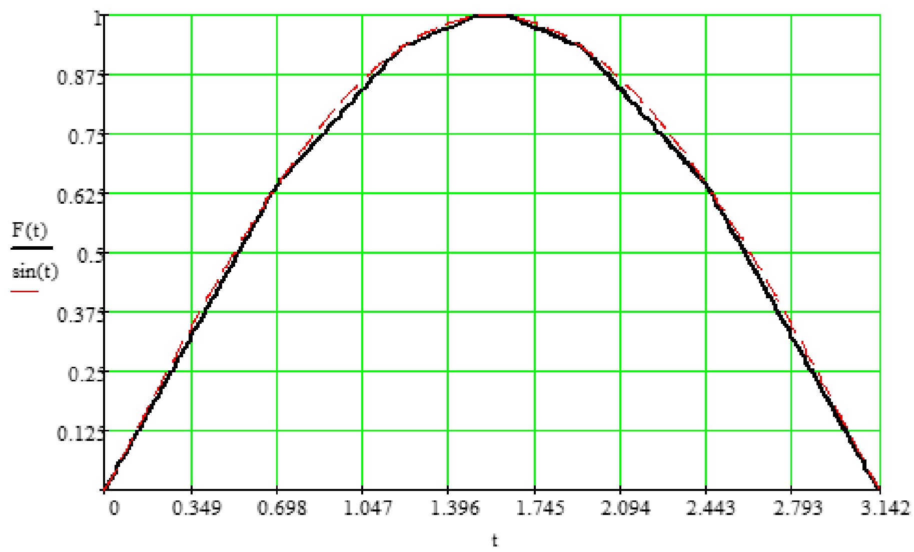

Рис. 2. – Синусоидальная функция, аппроксимированная по восьми точкам

сумму модулей линейных функций, что позволяет рассчитывать коэффициенты аппроксимации на основе простейших выражений, и дает возможность реализации на основе НКЛФ нелинейных функций в цифровых устройствах.

Литература

1. Романов Д.Н., Расчет коэффициентов аппроксимации для дискретной непрерывной кусочно-линейной функции. Методы и устройства передачи и обработки информации: Научно-технический журнал. – Вып. 23. /Под ред. В.В. Ромашова, В.В. Булкина. – М.: МИ ВлГУ, 2021. – С.85-88

2. Солонина А.И. и др. Основы цифровой обработки сигналов. Санкт-Петербург, «БВХ-Петербург», 2005

3. Курилов И.А., Романов Д.Н. Применение обобщенной непрерывной кусочно-линейной функции для аппроксимации характеристик на примере синусоидальной функции/Методы и устройства передачи и обработки информации: Межвуз. сб. науч. тр.–Вып.4. / Под. Ред. В.В. Ромашова, В.В. Булкина. – СПб: Гидрометеоиздат. – 2004. – С. 79 – 83.

Поступила 15 декабря 2023 г.

The article is devoted to simplifying the calculation of approximation coefficients for continuous piecewise linear functions with variable approximation step. In general, the approximation coefficients are calculated using matrix equations, which requires calculating the inverse matrix. The article proposes a method for calculating approximation coefficients based on the properties of linear functions, which significantly simplifies the algorithm for calculating approximation coefficients, including for functions with a non-fixed approximation step.

Keywords: Continuous piecewise linear functions, variable approximation step, approximation coefficients, methods, fast algorithms, optimization.

Романов Дмитрий Николаевич – кандидат технических наук, доцент кафедры радиотехники Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

E-mail: radon81@mail.ru.

Макаров Александр Васильевич – магистрант кафедры радиотехники Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых».

E-mail: m-snake@rambler.ru

Адрес: 602264, Муром, ул. Орловская, д. 23.