УДК 621.396

# Разработка методики расчета АКФ регулярных последовательностей импульсов

Жиганов С.Н., Соловьев С.А., Жиганова Е.А.

В работе получены аналитические выражения описывающие автокорреляционные функции регулярных последовательностей импульсов при различных значениях частоты заполнения импульсов.

*Ключевые слова:* автокорреляционная функция, последовательность импульсов.

## Введение

Эффективность выделения отраженных от радиолокационных целей сигналов из шумов в значительной степени зависит от корреляционных свойств этих сигналов и их спектральных плотностей. В радиолокации, радионавигации, связи часто в качестве информационного сигнала используют последовательности импульсов. При обработке таких сигналов решают задачи оценивания амплитуды импульсов, огибающей, определение периода их следования, а также временного положения последовательности импульсов Оптимальные алгоритмы обработки последовательностей импульсов на фоне помех хорошо известны, однако их зачастую трудно реализовать на практике, а синтез требует довольно полного (в статистическом смысле) и достаточно точною знания априорных данных о свойствах полезного сигнала и помехи Информация такого рода часто недоступна. Указанные недостатки оптимальных устройств оценки приводят к необходимости разработки новых методов обработки принимаемого сигнала с учетом его временной структуры.

Применительно к оценке периода следования и временного положения последовательности импульсов, в настоящее время имеется сравнительно мало результатов статистического синтеза и анализа устройств, позволяющих в той или иной степени решить указанные проблемы, причем, в большинстве работ, данные проблемы рассматриваются на качественном уровне

Вследствие этого, актуальной является задача синтеза и анализа различных, более простых, чем оптимальные, квазиправдоподобных и квазиоптимальных алгоритмов, характеристики которых в общем случае могут заметно отличаться от оптимальных, но тем не менее сходятся к ним при выполнении определенных условий.

При решении ряда задач обработки сигналов требуется пользоваться аналитическими выражениями, описывающими автокорреляционные функции и спектральные плотности последовательностей импульсов, что и является целью представленной работы.

## Автокорреляционная функция регулярной последовательности импульсов

Рассмотрим следующую задачу. Пусть формируется последовательность из $N$ импульсов, каждый из которых в пределах периода импульса описывается функцией вида

$$s(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \psi(t) + \varphi_0) \quad (1)$$
$$\text{при} - \tau_И/2 \le t \le \tau_И/2$$

где $A(t)$ – известный закон изменения огибающей импульса; $\omega_0 = 2\pi \cdot f_0$, $f_0$ – несущая частота; $\psi(t)$ – известный закон изменения фазы импульса; $\varphi_0$ – начальная фаза и $\tau_И$ – длительность импульса.

В случае регулярной последовательности все параметры импульсов являются постоянными – период следования $T$, несущая частота $f_0$, начальная фаза $\varphi_0$ и длительность $\tau_И$, изменяются только $A(t)$ и $\psi(t)$.

На рис. 1 приведена последовательность из десяти видеоимпульсов ($\omega_0 = 0$) со следующими параметрами: длительность каждого импульса составляет $\tau_И$ = 100 мкс, период следования $T$ = 1 мс, $A(t) = A = 1$, $\psi(t) = 0$ и $\varphi_0 = 0$.

Наиболее часто для описания свойств импульсных последовательностей рассчитывают ее автокорреляционную функцию

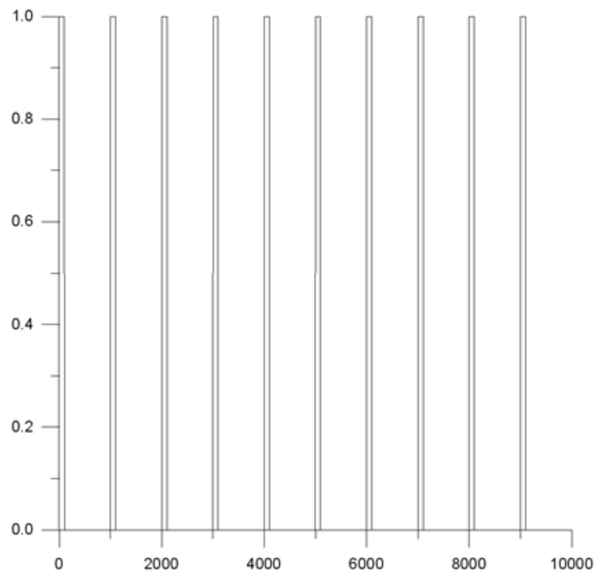



**Рис. 1.** – Регулярная последовательность видеоимпульсов

(АКФ), которая для детерминированного сигнала вычисляется по формуле:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt. \qquad (2)$$

Подставим в (2) выражение, описывающее сигнал (1) и найдем АКФ одиночного импульса. С учетом того, что сигнал в пределах периода $T$ отличен от нуля только от $-\tau_И/2$ до $\tau_И/2$, а так же введенные ограничения $A(t) = A$, $\psi(t) = 0$ и $\varphi_0 = 0$, получим

$$R(\tau) = \int_{-\tau_И/2+\tau}^{\tau_И/2} A\cos(\omega_0 t)A\cos(\omega_0(t-\tau))dt\,. \qquad (3)$$

Решением определенного интеграла (3) является выражение для АКФ одиночного видеоимпульса

$$R(\tau) = \frac{A^2}{2}(\tau_И - |\tau|) \times$$
$$\times\left(\cos(\omega_0\tau) + \frac{\sin\big(\omega_0(\tau_И - |\tau|)\big)}{\omega_0(\tau_И - |\tau|)}\right) \qquad (4)$$

или

$$R(\tau) = \frac{A^2}{2}(\tau_И - |\tau|) \times$$
$$\times\Big(\cos(\omega_0\tau) + \mathrm{sinc}\big(\omega_0(\tau_И - |\tau|)\big)\Big), \qquad (5)$$

где

$$\mathrm{sinc}\big(\omega_0(\tau_И - |\tau|)\big) = \frac{\sin\big(\omega_0(\tau_И - |\tau|)\big)}{\omega_0(\tau_И - |\tau|)} \qquad (6)$$

- функция синус Котельникова.

Для получения выражения АКФ регулярной последовательности импульсов воспользуемся методикой, изложенной в [4, 5]:

1. АКФ регулярной последовательности из $N$ импульсов содержит $2N - 1$ лепестков;
2. Центральный лепесток имеет максимальную амплитуду, лепестки справа и слева от центрального являются симметричными с уменьшающейся амплитудой;
3. Значение центрального лепестка АКФ последовательности импульсов равна $N{\cdot}R(\tau)$ одиночного импульса (5);
4. Значение первого бокового лепестка равна $(N-1){\cdot}R(\tau)$, второго $(N-2){\cdot}R(\tau)$, и т.д., последний лепесток АКФ определяется соотношением (5).

На рис. 2 приведена рассчитанная средствами языка программирования C++ по соотношению (2) АКФ последовательности импульсов, показанной на рис. 1. Полученная АКФ и функция, рассчитанная по описанной выше методике и соотношению (5), полностью совпали. Это говорит о том, что получить АКФ регулярной последовательности видеоимпульсов можно как в результате моделирования, так и при помощи расчетов.

Основными характеристиками АКФ являются – ширина центрального лепестка и максимальный уровень боковых лепестков (УБЛ). Из соотношения (5) и рис. 2 видно, что ширина центрального лепестка, как и всех

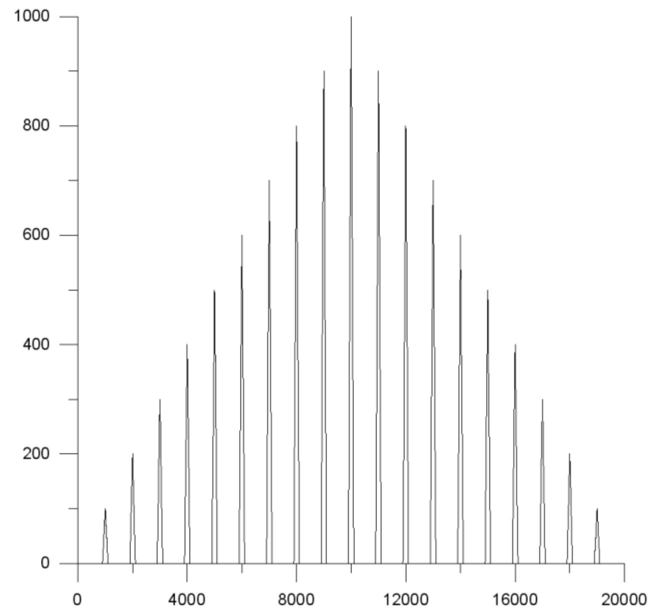



**Рис. 2.** – АКФ регулярной последовательности видеоимпульсов

других, составляет $2\tau_И$. Максимальный УБЛ равен отношению максимального значения бокового лепестка $R_{max}(\tau)$ (в нашем случае это первый боковой лепесток) к максимальному значению центрального $R(0)$

$$\text{УБЛ [дБ]} = 20\log\frac{R(0)}{R_{\max}(\tau)}. \qquad (7)$$

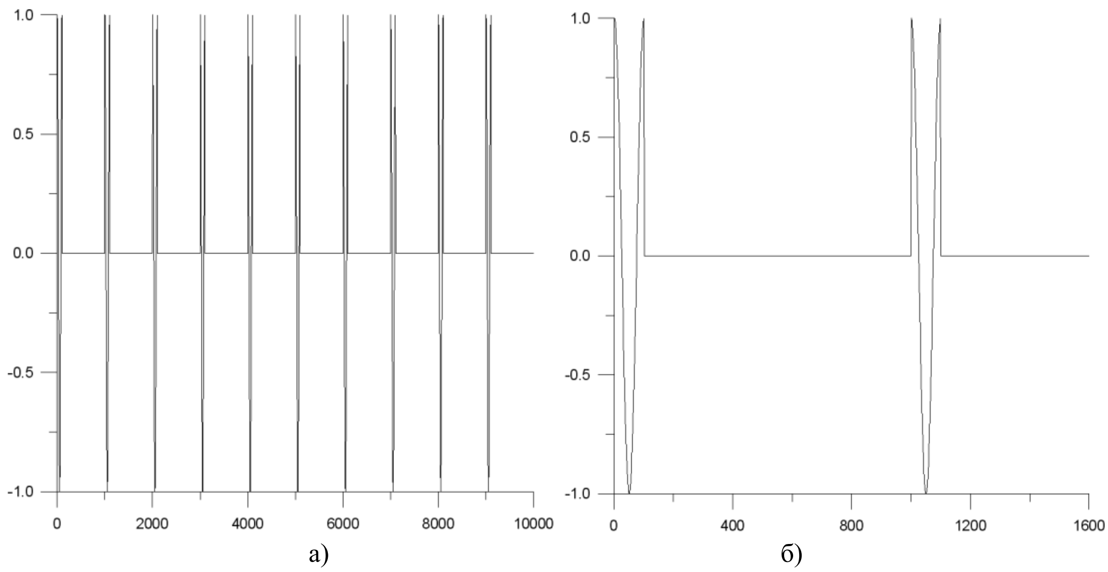
Для рассчитанной АКФ, приведенной на рис. 2 УБЛ составляет минус 0,92 дБ.

Рассмотрим теперь регулярные последовательности импульсов, у которых $\omega_0 \neq 0$, причем исследуем частный случай, когда выполняется условие

$$T = \frac{M}{f_0}, \qquad (8)$$

где $M$ – любое четное число, при этом начальные фазы каждого импульса в последовательности принимают одно и то же значение.

На рис. 3, а) приведена последовательность таких импульсов (1) при $f_0$ = 10 кГц (из соотношения (8) следует, что $M$ = 10), а на рис. 3, б) два первых импульса этой последовательности. На рис 4, а) полученная АКФ, а на рис. 4, б) центральный и два первых ее боковых лепестка.




а) б)

**Рис. 3.** – Регулярная последовательность импульсов при $f_0$ = 10 кГц

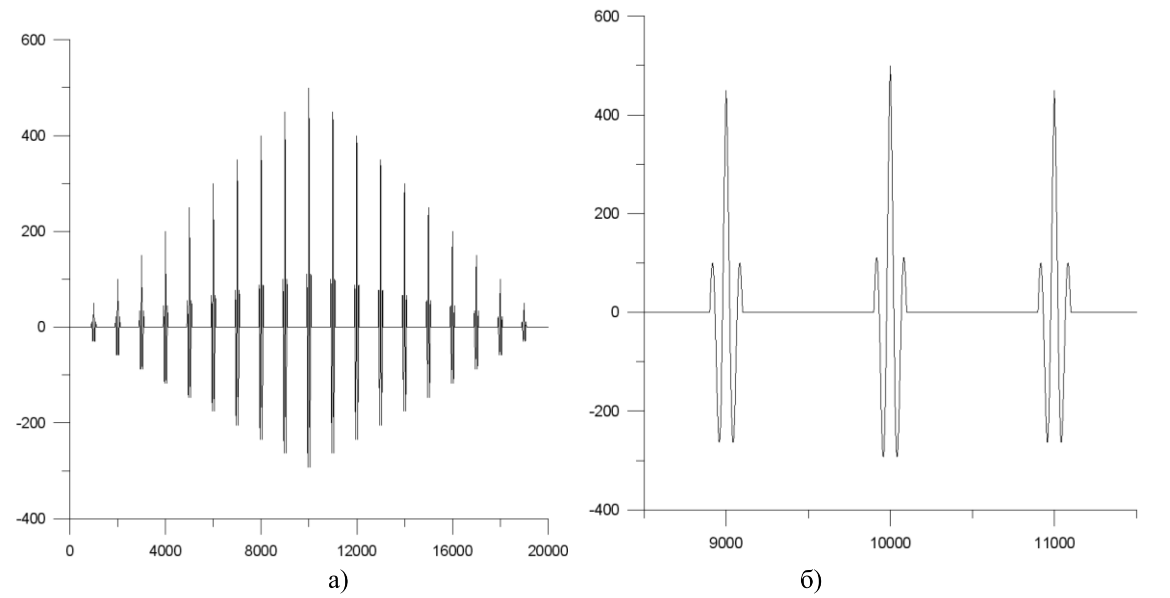



**Рис. 4.** – АКФ регулярной последовательности импульсов при $f_0$ = 10 кГц

В случае, когда $\omega_0 \neq 0$ последовательность содержит импульсы, состоящие из части периода или нескольких периодов гармонического колебания, и, как следствие, АКФ из треугольной формы, как в случае последовательности видеоимпульсов (рис. 2), имеет колебательный характер (рис. 4), причем $R(\tau)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. Как видно из рис. 4 при $\omega_0 \neq 0$ ширина центрального лепестка, как и в случае последовательности видеоимпульсов составляет $2\tau_И$, а УБЛ увеличился до значения минус 0,51 дБ. Кроме этого из сравнения рис 2 и 4 видно, что максимум главного лепестка АКФ при $\omega_0 \neq 0$ уменьшается по сравнению со случаем, когда $\omega_0 = 0$. Как и в случае видеоимпульсов, функция, рассчитанная по (5) по описанной методике совпала с экспериментальной зависимостью, приведенной на рис. 4.

Теперь рассмотрим общий случай, когда соотношение (8) не выполняется. Например, если у каждого импульса последовательности $f_0$ = 200 Гц (из соотношения (8) $M$ = 0,2), то получаем последовательность импульсов, приведенных на рис. 5. Из рис. 5 видно, что

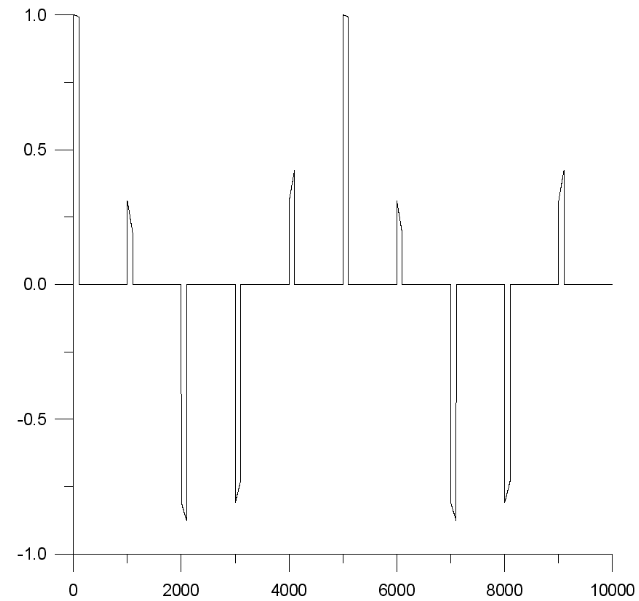



**Рис. 5.** – Регулярная последовательность импульсов при $f_0$ = 200 Гц

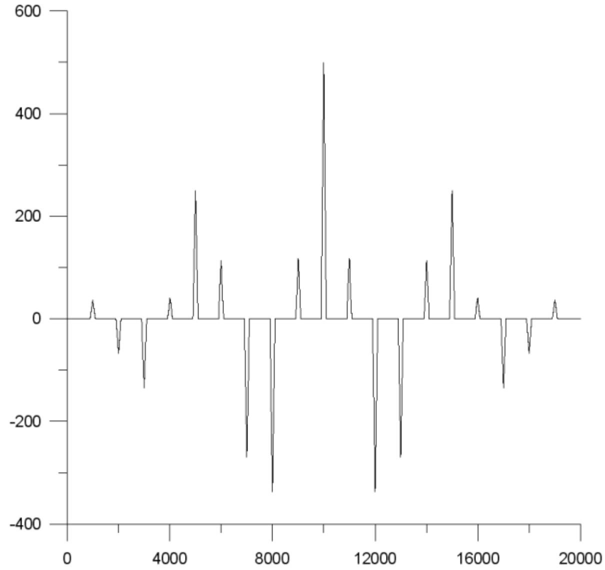



**Рис. 6.** – АКФ регулярной последовательности импульсов при $f_0$ = 200 Гц

начальные фазы у каждого импульса последовательности принимают разные значения, АКФ такой последовательности показана на рис. 6, которая получена методом моделирования.

В рассматриваемых ситуациях, описанную выше методику использовать нельзя. Получение аналитического выражения для АКФ в общем случае вызывает сложности, однако для расчета УБЛ АКФ формируемой последовательности импульсов при разных значениях $\omega_0$ можно использовать следующий подход.

Рассмотрим предельный случай последовательности, когда период и длительность импульса равны друг другу. При этом последовательность импульсов переходит в гармоническое колебание с частотой $\omega_0$. Т.е. мы наблюдаем сигнал вида

$$s_{\text{пр}}(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \psi(t) + \varphi_0). \quad (9)$$

На рис. 7 приведены – гармоническое колебание с $\omega_0$ = 500 Гц (пунктирная кривая) и полученная из нее последовательность импульсов (сплошная кривая).

Получим выражение для АКФ сигнала (9) при помощи выражения (2) при $A(t) = A$,

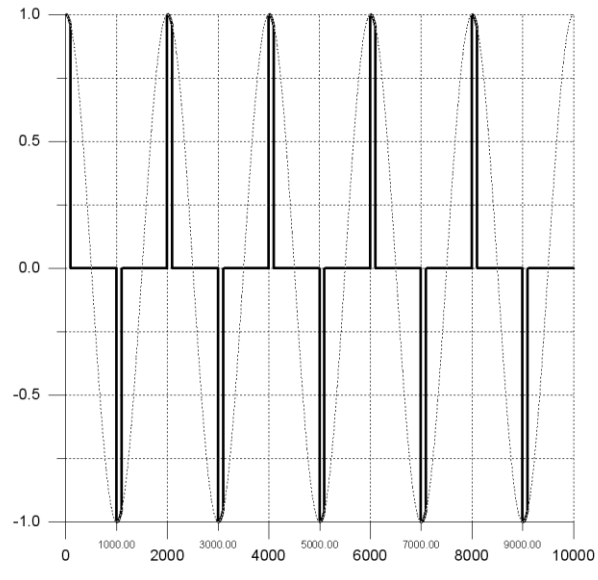
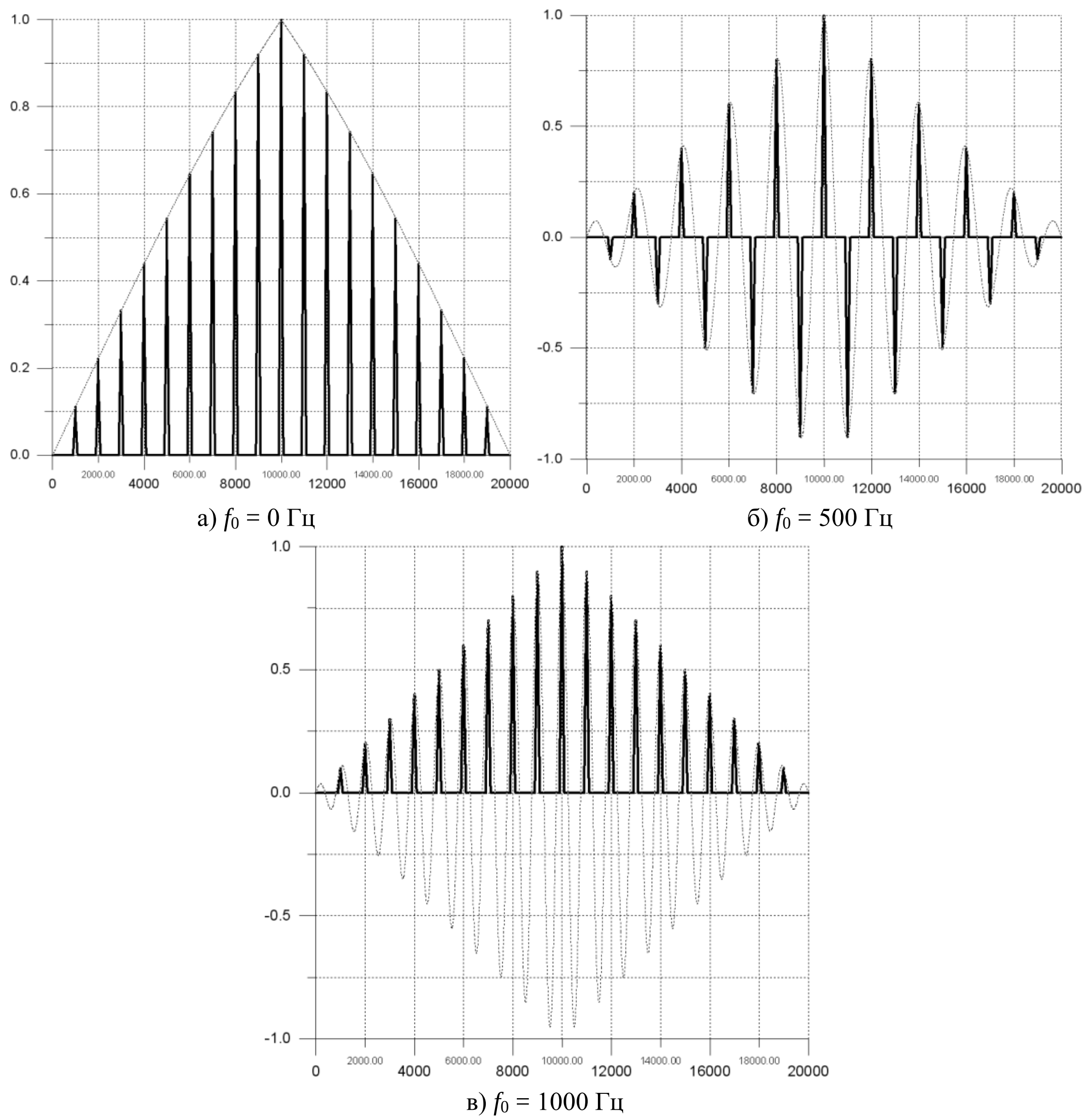



**Рис. 7.** – Гармоническое колебание с $\omega_0$ = 500 Гц (пунктирная кривая) и последовательность импульсов (сплошная кривая)




а) $f_0$ = 0 Гц б) $f_0$ = 500 Гц

в) $f_0$ = 1000 Гц

**Рис. 8.** – АКФ последовательностей импульсов при разных значениях $f_0$

$\psi(t) = 0$ и $\varphi_0 = 0$. После вычисления интеграла и проведения алгебраических упрощений получаем выражения для АКФ

$$R_{\text{пр}}(\tau) = \frac{A^2}{2}(T_{\text{набл}} - |\tau|) \times$$

$$\times \cos(\omega_0\tau) + \frac{A^2}{\omega_0}\sin\big(\omega_0(T_{\text{набл}} - |\tau|)\big), \quad (10)$$

где $T_{\text{набл}}$ – длительность наблюдаемого гармонического колебания.

На рис. 8, а) – в) приведены нормированные АКФ последовательностей импульсов при $\omega_0$ = 0 Гц, 500 Гц и 1000 Гц (сплошная кривая) и отрезка гармонического колебания длительностью $T_{\text{набл}}$ (пунктирная кривая). Из рис. 8 видно, что АКФ сигналов (1) и (9) совпадают в точках экстремумов.

Т.о. для расчета УБЛ АКФ последовательности импульсов длительностью $T_{\text{набл}}$ при различных значениях $\omega_0$ необходимо:

1. по соотношению (10) рассчитать АКФ;
2. найти модули значений АКФ в точках $\tau$, $2\tau$, …, $N\tau$ или в точках $-\tau$, $-2\tau$, …, $-N\tau$ от точки главного максимума АКФ;
3. выбрать из полученных значений максимальное;
4. по соотношению (7) рассчитать значение УБЛ.

### Заключение

В работе разработана методика построения аналитического выражения для расчета автокорреляционной функции регулярной последовательности импульсов при различных частотах заполнения. Результаты моделирования и расчеты АКФ по полученным соотношениям полностью совпали, что позволяет использовать полученную методику для упрощения расчетов АКФ.

**Литература**


1. Ледовских Н В Статистическое моделирование алгоритмов оценки временного положения и периода следования последовательности импульсов /Н В. Ледовских // Материалы XIII международной научно – технической конференции "Радиолокация, навигация, связь" —Т 1 —Воронеж, 2007 — С 161-171.
2. Ледовских Н В Эффективность оценки периода следования импульсов квазиоптимальным измерителем, использующим рециркулятор /А П Трифонов, Н В Ледовских // Материалы IX международной научно- технической конференции "Радиолокация, навигация, связь" —Т I —Воронеж, 2003 —С 163 – 171.
3. Жиганов С.Н. Расчет максимального уровня боковых лепестков регулярной последовательности импульсов // Наука и образование в развитии промышленной, социальной и экономической сфер регионов России [Электронный ресурс]: VI Всероссийские научные Зворыкинские чтения: сб. тез. Докл. V Всероссийской межвузовской научной конференции. Муром, 14 февр. 2014 г.– Муром: Изд.-полиграфический центр МИ ВлГУ, 2014.– С. 649: ил.– 1 электрон. Опт. Диск(CD-ROM). ISSN 2220-8763 (CD-ROM).
4. Жиганов С.Н., Михеев К.В., Смирнов М.С. Система контроля формируемых сигналов гетеродина РЛС // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018619147 от 01.08.2018 г.
5. Чекушкин В.В., Жиганов С.Н., Михеев К.В., Быков А.А. Математическое моделирование и вычислительные алгоритмы в радиотехнических системах // Вестник Концерна ВКО «Алмаз – Антей». № 1, 2017. – С. 98-104.
6. Chekushkin V.V., Zhiganov S.N. Computational methods in optimization of engineering problems // Raleigh, North Carolina, USA: Open Science Publishing, 2018. 202 p.
7. Вержбицкий В.М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): Учебн. пособие для ВУЗов. – М.: Высш. шк., 2001. – 382 с.


**Поступила 14 сентября 2022 г.**

Analytical expressions describing the autocorrelation functions of regular pulse sequences at different values of the pulse filling frequency are obtained.

*Key words:* autocorrelation function, a sequence of pulses.

*Жиганов Сергей Николаевич* – к.т.н., доцент кафедры радиотехники Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

*E-mail:* s_zh_72@mail.ru.

*Соловьев Сергей Андреевич* – магистрант Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.

*Жиганова Елена Александровна* – к.т.н., доцент кафедры радиотехники Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

*Адрес:* 602264, Муром, ул. Орловская, д. 23.