УДК 004.383

# Расчет коэффициентов аппроксимации для дискретной непрерывной кусочно-линейной функции

Романов Д.Н.

Статья посвящена упрощению вычисления коэффициентов аппроксимации для непрерывных кусочно-линейных функций. В общем случае коэффициенты аппроксимации рассчитываются с помощью матричных уравнений, что требует вычисления обратной матрицы. В статье предложен способ вычисления коэффициентов аппроксимации на основе свойств линейных функций, что существенно упрощает алгоритм вычисления коэффициентов аппроксимации.

*Ключевые слова:* Непрерывные кусочно-линейные функции, коэффициенты аппроксимации, методы, быстрые алгоритмы, оптимизация.

«Цифровизация» радиоэлектронной техники имеет ряд специфическим трудностей, одной из которых является невозможность непосредственной реализации нелинейных характеристик и сигналов с помощью логических функций. Для преодоления таких ограничений используется представление нелинейных характеристик и сигналов с помощью различных видов аппроксимации, которые в дальнейшем реализуются на основе логических и арифметических функций.

В качестве аппроксимирующих предлагается использовать непрерывные кусочно-линейные функции (НКЛФ). Эти функции являются линейными и для своей реализации требуют только операций сложения, взятия по модулю и умножения. Для получения требуемой точности достаточно ограниченного количества коэффициентов аппроксимации, что снижает объем памяти, требуемой для их хранения и дальнейшего использования.

Известна дискретная непрерывная кусочно-линейная функция [1]. Данная функция позволяет проводить аппроксимацию одной непрерывной кусочно-линейной функцией вида:

$$F_m = \sum_{n=0}^{N} K_m |m-n|, (1)$$

где m – номер отсчета, n – шаг аппроксимации, $K_m$ – коэффициент аппроксимации.

В общем случае коэффициенты аппроксимации определяются следующим образом:

$$[K] = [y] \cdot [M]^{-1},$$

Где [y] – вектор значений функции в узлах аппроксимации,

$$[M] = \begin{bmatrix} |0-0| & |0-1| & \cdots & |0-N| \\ |1-0| & |1-1| & \cdots & |1-N| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |N-0| & |N-1| & \cdots & |N-N| \end{bmatrix}$$

Для примера рассмотрим пример аппроксимации прямоугольного импульса по восьми отсчетам. Значения отсчетов заданы вектором значений: $y^T = [0,1,1,1,1,1,1,0]$.

Матрица M для этого случае примет вид:

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Так как матрица [M] является Теплицевой, то для расчета обратной матрицы можно воспользоваться, в том числе известным алгоритмом Левинсона-Дарбина [2].

Обратная матрица имеет вид:

$$[M] = \begin{bmatrix} -0{,}429 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}071 \\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -1 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & -1 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & -1 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & -1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \\ 0{,}071 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & -0{,}429 \end{bmatrix}$$

Вектор коэффициентов аппроксимации для этого случае имеет вид:

$$K = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Такой подход к вычислению коэффициентов аппроксимации требует высоких вычислительных затрат, особенно при большом количестве узлов аппроксимации. Поэтому предлагается определять коэффициенты аппроксимации, опираясь на свойства линейных функций.

Функция (1) представляет собой сумму модулей линейных функций, поэтому процесс получения аппроксимирующей функции имеет вид, представленный на рис. 1 и 2.

Сформированный, таким образом, импульс представлен на рис. 3.

По аналогии с обобщенной НКЛФ [3], таблица коэффициентов аппроксимации для дискретной НКЛФ приведена в таблице 1.

Таблица 1

| Номер, $m$ | Коэффициент, $K_m$ |
|---|---|
| 0 | $\frac{-2y_0+y_1}{2}$ |
| 1 | $\frac{y_0-2y_1+y_2}{2}$ |
| 2 | $\frac{y_1-2y_2+y_3}{2}$ |
| 3 | $\frac{y_2-2y_3+y_4}{2}$ |
| 4 | $\frac{y_3-2y_4+y_5}{2}$ |
| 5 | $\frac{y_4-2y_5+y_6}{2}$ |
| 6 | $\frac{y_5-2y_6+y_7}{2}$ |
| 7 | $\frac{y_6-2y_7}{2}$ |

В этом случае формула для коэффициентов аппроксимации примет вид:

$$K_m = \frac{y_{m-1}-2y_m+y_{m+1}}{2}, \qquad (2)$$

В случае, если $y_n$ не определено, вместо него подставляется значение 0.

Рассмотрим расчет коэффициентов аппроксимации для более сложной функции. Аппроксимируем с помощью дискретной НКЛФ синусоидальную функцию, по восьми точкам. Значения функции приведены в таблице 2.

Таблица 2.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| m | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $\sin\left(\frac{\pi m}{7}\right)$ | 0 | 0.434 | 0.782 | 0.975 |
| m | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $\sin\left(\frac{\pi m}{7}\right)$ | 0.975 | 0.782 | 0.434 | 0 |

Функция, аппроксимированная по узлам аппроксимации, представленным в таблице 2, приведена на рис. 4.

Полученное выражение (2) для нахождения коэффициентов аппроксимации дискретной непрерывной кусочно-линейной функции требует меньших вычислительных ресурсов и имеет более простой алгоритм вычислений.

Таким образом, дискретная НКЛФ состоит из простейших арифметических операций и позволяет рассчитывать коэффициенты аппроксимации на основе простейших выражений, что дает возможность реализации на ее основе нелинейных функций в цифровых устройствах.

**Литература**

1. Романов Д.Н., Горячев М.С. Непрерывная кусочно-линейная функция с дискретным шагом аппроксимации. Методы и устройства передачи и обработки информации: Научно-технический журнал. – Вып. 22. /Под ред. В.В. Ромашова, В.В. Булкина. – М.: МИ ВлГУ, 2020. – С.41-43

2. Солонина А.И. и др. Основы цифровой обработки сигналов. Санкт-Петербург, «БВХ-Петербург», 2005

3. Курилов И.А., Романов Д.Н. Применение обобщенной непрерывной кусочно-линейной функции для аппроксимации характеристик на примере синусоидальной функции/Методы и устройства передачи и обработки информации: Межвуз. сб. науч. тр.–Вып.4. / Под. Ред. В.В. Ромашова, В.В. Булкина. – СПб: Гидрометеоиздат. – 2004. – С. 79 – 83.

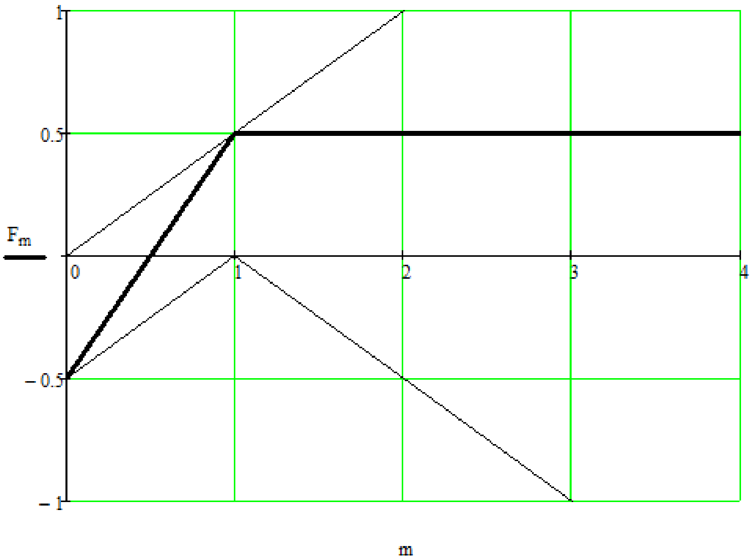



**Рис. 1.** – Формирование переднего фронта импульса

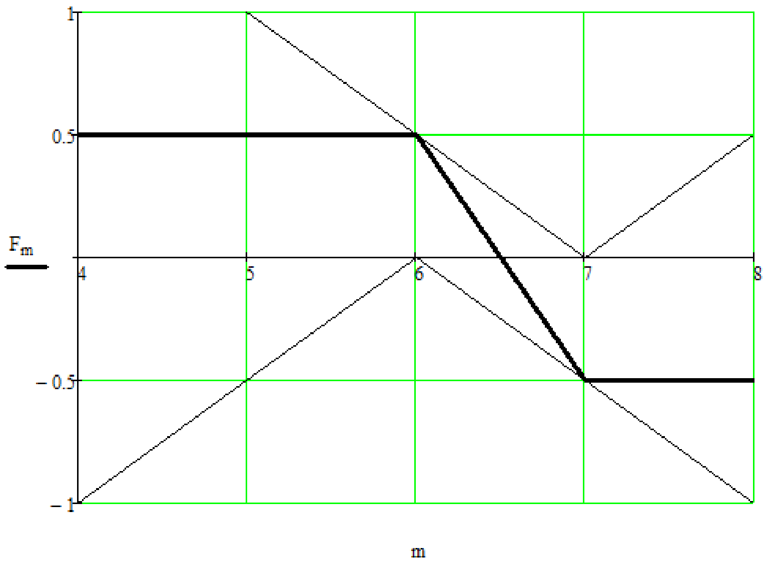
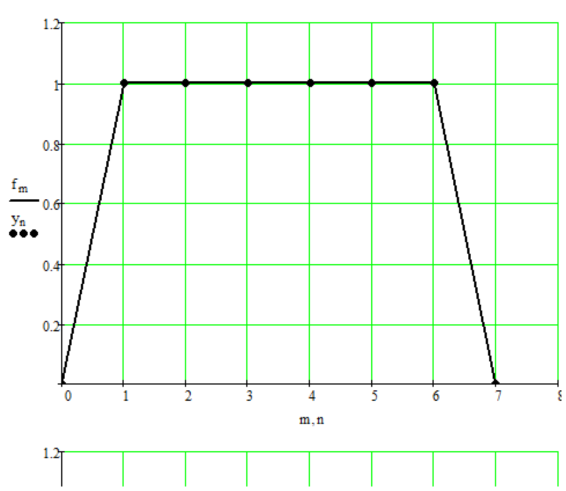



**Рис. 2.** – Формирование заднего фронта импульса



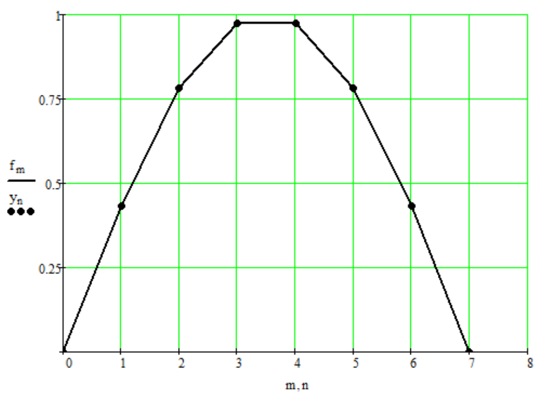




**Рис. 4.** – Аппроксимированная функция

**Поступила 17 апреля 2021 г.**

This paper describes simplifying the calculation of approximation coefficients for continuous piecewise linear functions. In general, the approximation coefficients are calculated using matrix equations, which requires calculating the inverse matrix. The article proposes a method for calculating the approximation coefficients based on the properties of linear functions, which greatly simplifies the algorithm for calculating the approximation coefficients.

Keywords: Continuous piecewise linear functions, approximation coefficients, methods, fast algorithms, optimization.

*Романов Дмитрий Николаевич* – кандидат технических наук, доцент кафедры радиотехники Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

*E-mail:* radon81@mail.ru.

*Адрес*: 602264, Муром, ул. Орловская, д. 23.