

УДК 621.396

## Сравнение трех оптимальных методов синтеза КИХ-фильтра

Жиганов С.Н., Романов Д.Н., Жиганова Е.А., Ефремов А.А.

В работе проведен подробный анализ трех оптимальных методов синтеза КИХ-фильтров: метод разложения в ряд Фурье аппроксимирующей функции, метода наименьших квадратов и метод равномерной Чебышевской аппроксимации, реализованный алгоритмом Ремеза.

**Ключевые слова:** Синтез КИХ-фильтра, аппроксимация, равномерный (чебышевский) критерий, среднеквадратический критерий.

## Введение

Методы цифровой обработки сигналов (ЦОС) в настоящее время составляют значительную часть необходимых профессиональных навыков специалиста по обработке сигналов. Направлений ЦОС в связи с повсеместным их применением огромное количество, ежегодно появляются новые подходы к обработке сигналов, которые внедряются в практику, ряд существующих из них стали уже классическими [1–5].

Системе ЦОС выполняют заданные арифметические и функциональные преобразования отсчетов входного цифрового сигналом  $x(n)$ , представляющие собой двоичные числа заданной разрядности. Сама система ЦОС может быть реализована в виде процессора ЦОС, с использованием жесткой логики, при помощи программируемых логических интегральных схем (ПЛИС), либо написана на том или ином языке программирования [6–7].

Значительную часть методов ЦОС занимают цифровые фильтры. Их принято делить на фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ) и бесконечной импульсной характеристикой (БИХ). Эти фильтры принципиально отличаются друг от друга, как характеристикам, так и по методам синтеза и представляют собой два разных направления цифровой фильтрации, решающие одну задачу получения цифрового сигнала с заданными частотными характеристиками.

КИХ -фильтры не рекурсивные и ограничены счетным количеством коэффициентов  $N$ , которые формируют его импульсную характеристику  $h(n)$ . На рис. 1 приведена структурная схема КИХ-фильтра, которая

содержит  $N$  умножителей, сумматоров и линий задержки.

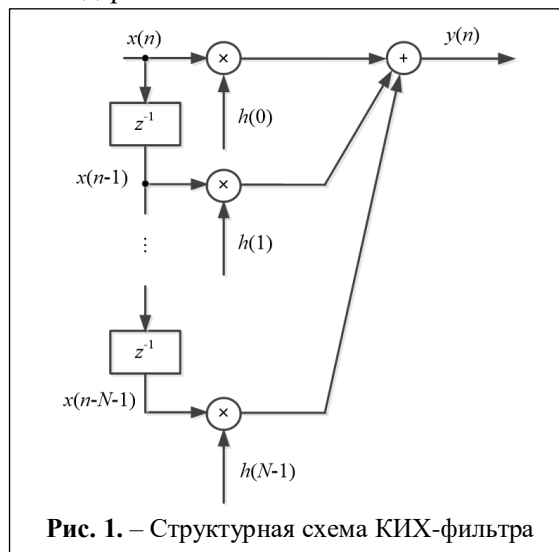


Рис. 1. – Структурная схема КИХ-фильтра

Выходной сигнал КИХ-фильтра является результатом свертки задержанных входных отсчетов и отсчетов импульсной характеристики и определяется следующим выражением

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k). \quad (1)$$

Задача синтеза КИХ-фильтра состоит в получении импульсной характеристики фильтра. Для этого используют различные методы и подходы, часть из них можно найти в [1–5]. Среди существующих методов выделяют группу оптимальных, которые при получении импульсной характеристики фильтра минимизируют некоторый критерий оптимальности. В качестве критериев в основном используют среднеквадратический

$$\varepsilon = \int_0^{0,5} W(f) |H_n(f) - \dot{H}_p(f, c)|^2 \rightarrow \min, \quad (2)$$

или наилучший равномерный (чебышевский) критерий вида

$$\varepsilon = \max_{0 \leq f \leq 0,5} W(f) |H_n(f) - \dot{H}_p(f, \mathbf{c})| \rightarrow \min. \quad (3)$$

В этих соотношениях  $|\dot{H}_p(f, \mathbf{c})|$  требуемая частотная характеристика фильтра;  $f$  – нормированная частота,  $\mathbf{c}$  – вектор коэффициентов аппроксимирующей функции, который связан простым соотношением с вектором коэффициентов фильтра  $\mathbf{b}$ ;  $H_n(f)$  – аппроксимируемая функция;  $W(f)$  – весовая функция аппроксимации, которая определяет требования к точности аппроксимации на различных частотных участках. В качестве методов, реализующих первый критерий чаще всего, рассматривают метод разложения в ряд Фурье аппроксимируемой функции и метод наименьших квадратов, а второй критерий реализуется, пожалуй, самым популярным алгоритмом Ремеза.

Целью работы является сравнение трех оптимальных методов получения коэффициентов импульсной характеристики КИХ-фильтра.

### 1. Этапы синтеза КИХ-фильтра

Синтез импульсной характеристики ЦФ у всех рассматриваемых подходов одинаковый и осуществляется на нескольких этапах.

На первом этапе формулируется задача аппроксимации желаемой частотной характеристики фильтра при помощи некоторой функции, при этом решаются следующие вопросы:

1. Принимается решение, какой тип фильтра будет синтезирован – это может быть один из четырех видов фильтров с линейной ФЧХ или минимально-фазовый фильтр [3–5];
2. Выбирается аппроксимирующая функция, которая определяет требуемую частотную характеристику фильтра  $|\dot{H}_p(f, \mathbf{c})|$ ;
3. Каким-либо методом рассчитывается аппроксимируемая функция  $H_n(f)$ ;
4. Выбирается критерий аппроксимации, т.е. уточняется смысл приближенного равенства

$$|\dot{H}_p(f, \mathbf{c})| \approx H_n(f) \quad (4)$$

при заданных значениях  $f$ .

5. Задается весовая функция аппроксимации  $W(f)$ .

На этом этапе проектирования фильтра формулируется математическая задача вычисления вектора коэффициентов аппроксимирующей функции  $\mathbf{c}$  по заданным требованиям к характеристикам фильтра.

На втором этапе решается задача аппроксимации – рассчитывается вектор коэффициентов фильтра  $\mathbf{b}$ , который включает в себя следующие шаги:

1. Рассчитывается необходимый порядок фильтра  $N$ ;
2. Рассчитывается вектор коэффициентов  $\mathbf{c}$  функции  $|\dot{H}_p(f, \mathbf{c})|$ ;
3. Проверяется критерий (4) обеспечения необходимой точности аппроксимации;

Если выбранный критерий выполняется, то рассчитывается на основе вектора  $\mathbf{c}$  вектор коэффициентов фильтра  $\mathbf{b}$  и на этом синтез фильтра заканчивается. В противном случае порядок фильтра увеличивается, и шаги 2 и 3 выполняются снова до тех пор, пока критерий не будет выполнен, либо вынесено решение, что при таких условиях синтезировать фильтр невозможно.

Результатом этого этапа является вектор коэффициентов фильтра  $\mathbf{b}$ .

На третьем этапе проводится анализ характеристик фильтра при ограничении разрядности коэффициентов фильтра и отсчетов входного и выходного сигнала. Если характеристики фильтра в этом случае будут неудовлетворительные, то опять возвращаются на второй или даже первый этап проектирования.

И, наконец, на четвертом этапе проектирования фильтра рассматриваются вопросы практической реализуемости фильтра при помощи имеющейся элементной базы или в заданной программной среде.

Из всего вышеизложенного следует, что оптимальные методы проектирования ЦФ представляют собой итерационный процесс, требующий от проектировщика больших временных затрат и большого объема знаний не только в области алгоритмов и методов ЦОС, но и владения навыками цифровой

схемотехники и программирования для достижения поставленной цели.

Теперь рассмотрим три оптимальных метода построения КИХ-фильтра.

**2. Метод разложения в ряд Фурье аппроксимируемой функции**

Этот метод разложения в ряд Фурье аппроксимируемой функции может использоваться для нахождения коэффициентов всех четырех типов КИХ-фильтров с линейной фазовой характеристикой и минимально-фазовых фильтров [3]. Несомненным его достоинством является то, что коэффициенты фильтра получаются из аналитических выражений, в отличие от двух других методов.

В этом методе аппроксимирующая функция задается выражением

$$|\dot{H}_p(f, c)| = \sum_{i=0}^K c_i \varphi_i(f), \quad (5)$$

где  $c_i$  – вещественные числа;  $\varphi_i(f) = \cos i2\pi f$  – выбранная система ортогональных функций. Тогда неизвестные коэффициенты  $c$  рассчитываются по формуле

$$c_i = D \int_0^{0,5} H_n(f) \varphi_i(f) df, \quad (6)$$

где  $D=2$  при  $i=0$  и  $D=4$  при  $i>0$ . Для исключения явления Гиббса функция  $H_n(f)$  должна быть непрерывна, то есть не иметь точек разрыва при всех значениях  $f \in [0; 0,5]$ .

Рассмотрим в качестве примера построение методом разложения в ряд Фурье аппроксимируемой функции КИХ-фильтра, обладающего следующими характеристиками:

- граничная частота полосы пропускания – 1 кГц;
- граничная частота полосы затухания – 3 кГц;
- частота дискретизации – 8 кГц;
- неравномерность в полосе пропускания  $\delta_{\pi} < 0,5$  дБ;
- затухание в полосе задержания  $\delta_s \geq 50$  дБ.

Будем синтезировать КИХ-фильтр типа 1, у которого количество коэффициентов  $N$  –

нечетное; коэффициенты симметричные  $b_i = b_{N-i-1}$ ;  $K = \frac{N-1}{2}$ , а коэффициенты аппроксимирующей функции  $c_i$  связаны с коэффициентами КИХ-фильтра  $b_i$  соотношениями

$$c_0 = b_K, c_i = 2b_{K-i}, i = 1, 2, \dots, K$$

или

$$b_K = c_0, b_i = \frac{c_{K-i}}{2}, i = 0, 1, \dots, K - 1.$$

Зададимся количеством коэффициентов ЦФ  $N=11$ . Доопределим аппроксимируемую функцию в промежуточной полосе прямой линией, что бы не было точек разрыва, тогда желаемая частотная характеристика фильтра  $H_n(f)$  определяется выражением

$$H_n(f) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq f < f_{\text{гп}}; \\ \frac{f_{\text{гз}} - f}{f_{\text{гз}} - f_{\text{гп}}} & \text{при } f_{\text{гп}} \leq f < f_{\text{гз}}; \\ 0 & \text{при } f_{\text{гз}} \leq f < 0,5. \end{cases} \quad (7)$$

По соотношению (6) рассчитываем коэффициенты  $c_i$  аппроксимирующей функции, а по соотношению (5) саму функцию. На рис.2 приведены две кривые- сплошная кривая соответствует идеальной частотной характеристики (7), а пунктирная функции (5). Из сравнения кривых видно, что рассчитанная кривая достаточно точно аппроксимирует заданную кривую.

На рис. 3 приведен график ошибок аппроксимации, из него видно, что при  $N=11$  максимальные ошибки не превосходят величину 0,033, которые наблюдаются на граничных частотах полосы пропускания и задержания.

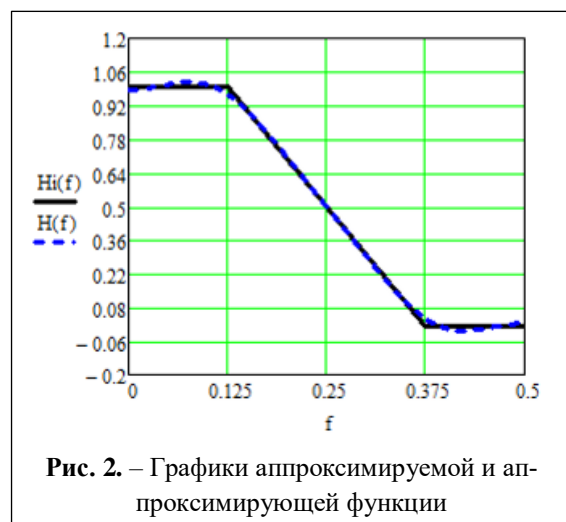
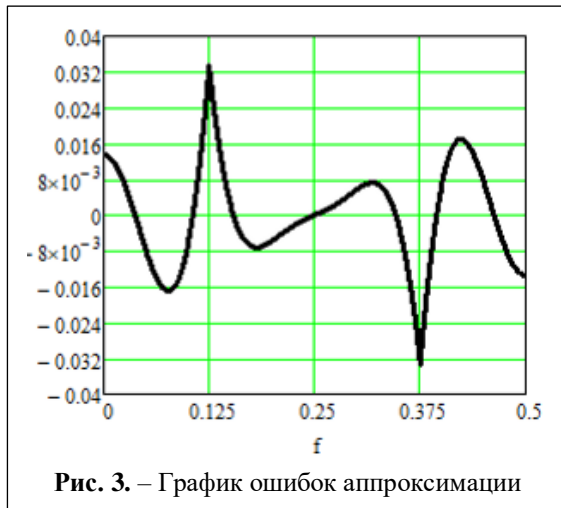
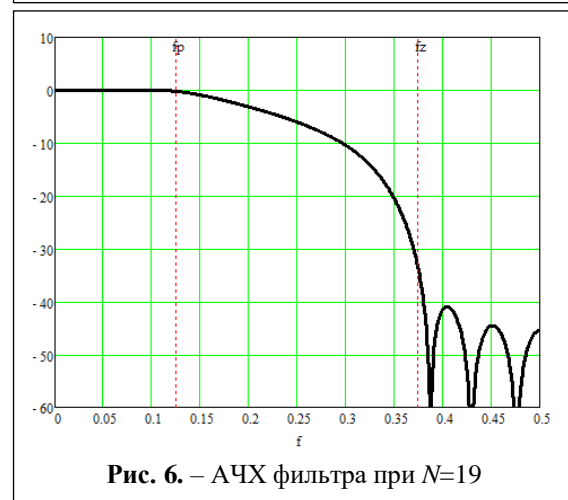
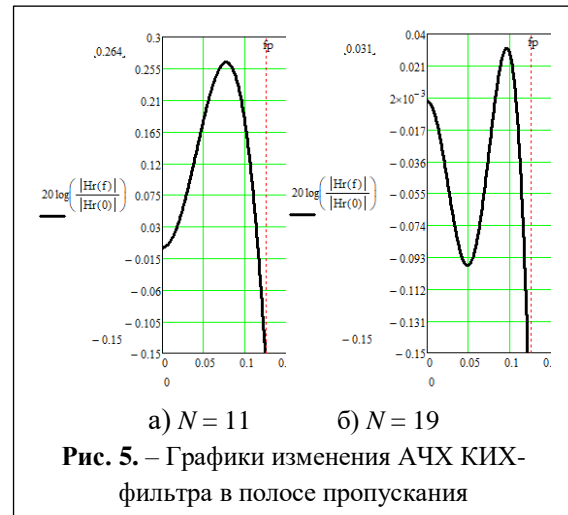
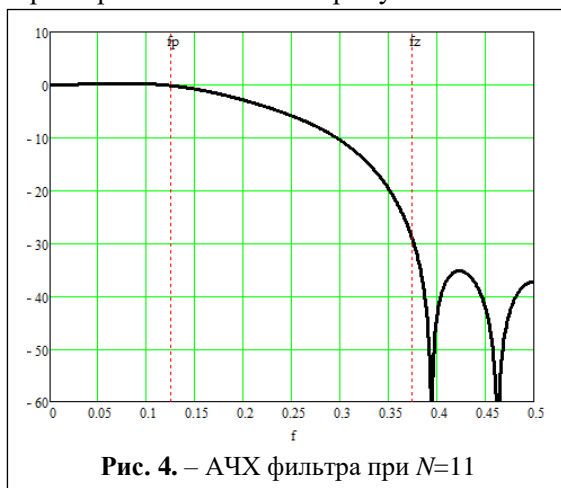


Рис. 2. – Графики аппроксимируемой и аппроксимирующей функции



На рис. 4 приведена амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) синтезированного КИХ-фильтра. Из рисунка видно, что полученная частотная характеристика соответствует ФНЧ с заданными граничными частотами полосы пропускания и задержания. При этом подавление в полосе задержания составляет более 30 дБ, а неравномерность частотной характеристики в полосе пропускания составляет 0,264 дБ, что видно из рис. 5 а) на котором показана часть частотной характеристики фильтра в полосе пропускания.

Из рис. 4 видно, что величина затухания в полосе задержания синтезированного фильтра не обеспечивает требуемого значения в – 50 дБ. поэтому в соответствии с алгоритмом синтеза увеличиваем количество коэффициентов фильтра до  $N=19$ . На рис. 6 показана результирующая АЧХ на рис. 5 б) частотная характеристика в полосе пропускания.



Из сравнения рис. 4 и рис.6 видно, что фильтр обеспечивает фильтрацию частотных составляющих сигнала в пределах граничных частот, при этом величина затухания в полосе подавления увеличилась до 35 дБ.

Из сравнения кривых рис. 5 а) и 5 б) видно, что при увеличении порядка фильтра неравномерность в полосе пропускания уменьшилась с 0,264 дБ до 0,031 дБ. При этом увеличивается количество периодов колебаний частотной характеристики в полосе пропускания.

Как показали результаты экспериментов величина максимальных ошибок аппроксимации уменьшилась до 0,02 при увеличении порядка фильтра до 19.

### 3. Метод наименьших квадратов

Поиск коэффициентов аппроксимирующей функции с применением метода наименьших квадратов основан на минимизации функции

(2). Для нахождения ее минимума нужно эту функцию продифференцировать по всем неизвестным коэффициентам  $c_m$  и результат приравнять к нулю, т.е. получить уравнения вида

$$\frac{\partial \varepsilon(c)}{\partial c_m} = 0,$$

что приводит к системе линейных уравнений

$$\sum_{i=0}^K d_{m,i} c_i = d_{m,K+1}, \quad (8)$$

где

$$d_{m,i} = \int_0^{0,5} W(f) \varphi_m(f) \varphi_i(f) df,$$

$$d_{m,K+1} = \int_0^{0,5} W(f) H_n(f) \varphi_m(f) df,$$

$$\varphi_i(f) = \cos i2\pi f.$$

Данный метод позволяет сформировать сложную целевую функцию, которая может учитывать дополнительные ограничения на коэффициенты фильтра. Увеличение значений весовой функции в полосе пропускания или затухания приводит к повышению точности аппроксимации идеальной частотной характеристики на соответствующем участке спектра [3].

Рассмотрим проектирование КИХ-фильтра с характеристиками, приведенными в п. 2. Зададим порядок фильтра  $N = 11$ , при этом  $K = 5$ , значит количество уравнений в системе (8) так же составит 5. Для весовой функции [3]

$$W(f) = \begin{cases} 1, & 0 \leq f \leq f_{\text{гп}}; \\ 0, & f_{\text{гп}} < f < f_{\text{гз}}; \\ 10, & f_{\text{гз}} \leq f < 0,5 \end{cases} \quad (9)$$

Нашли коэффициенты  $d_{m,i}$  и  $d_{m,K+1}$  и решили систему уравнений (8) относительно коэффициентов аппроксимируемой функции  $c_i$ . АЧХ синтезированного фильтра показана на рис. 7.

Сравнивая графики АЧХ рис. 4 и рис. 7 видим, что подавление частотных составляющих сигнала у фильтра, синтезированного методом наименьших квадратов возросло до 49 дБ. При увеличении количества коэффи-

циентов фильтра до 19 подавление увеличивается до 80 дБ.

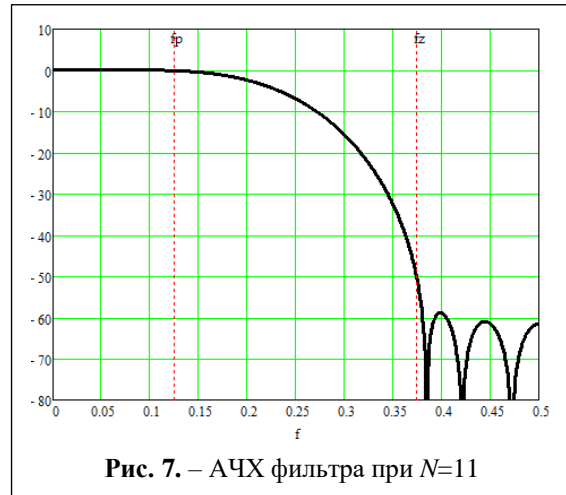


Рис. 7. – АЧХ фильтра при N=11

На рис. 8а) и б) приведены графики изменения АЧХ фильтра в полосе пропускания при  $N = 11$  и  $N = 19$  соответственно. Из рисунка видно, что при  $N = 11$  неравномерность в полосе пропускания не превосходит 0,06 дБ, что более чем в 4 раза меньше неравномерности фильтра, полученного методом разложения в ряд Фурье при том же значении  $N$ . При увеличении порядка фильтра до 19 значение неравномерности снижается до 0,001875 дБ.

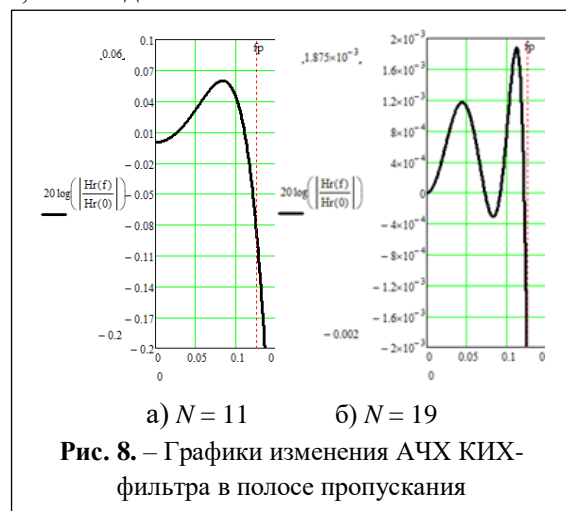


Рис. 8. – Графики изменения АЧХ КИХ-фильтра в полосе пропускания

Следует отметить, что увеличение значений весовой функции в полосе пропускания или затухания приводит к повышению точности аппроксимации идеальной частотной характеристики на соответствующем участке спектра.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что погрешность аппроксимации идеальной частотной характеристики у мето-

да наименьших квадратов существенно меньше, чем у метода разложения в ряд Фурье аппроксимируемой функции. Этот метод позволяет получить большее затухание в полосе задержания и меньшее значение неравномерности частотной характеристики в полосе пропускания при одинаковом количестве коэффициентов фильтра по сравнению с первым методом.

#### 4. Алгоритм Ремеза

В этом методе синтеза, как и в двух предыдущих случаях, аппроксимирующей функцией является функция (5), в которой  $\varphi_i(f) = \cos i2\pi f$  или  $\varphi_i(f) = f^i$ , тогда функцией наилучшего приближения будет такая  $|\dot{H}_p(f, \mathbf{c})|$  со значениями коэффициентов  $c_i$ , которые соответствуют минимальному значению критерия (3). Из обобщенной теоремы Чебышева следует, что функция  $|\dot{H}_p(f, \mathbf{c})|$  является функцией наилучшего равномерного приближения к функции  $H_n(f)$  с весовой функцией  $W(f)$ . Для выполнения этого условия необходимо, чтобы функция (3) принимала наибольшие, равные друг другу по абсолютной величине значения  $\Delta_{max}$  и чередующиеся по знаку в  $K+2$  последовательно расположенных точках (точках альтеранса)  $f_1, f_2, \dots, f_{K+2}$  на интервале  $[0; 0,5]$ . Когда это условие будет выполнено, то результат синтеза достигнут.

Алгоритм Ремеза достаточно громоздкий в целях экономии здесь не приводится, у читателей не возникнет сложностей найти его описание в известной литературе, в частности в [1–5].

Необходимое для достижения заданных величин неравномерности и затухания для граничных частот полосы пропускания и затухания количество отсчетов импульсной характеристики вычисляется по эмпирической формуле [5]. Для нашего случая он должен быть больше 5, но мы выбрали величину, как и в двух предыдущих случаях  $N = 11$ .

После проведения всех необходимых вычислений в результате была рассчитана им-

пульсная характеристика фильтра. На рис. 9 приведена ее АЧХ.

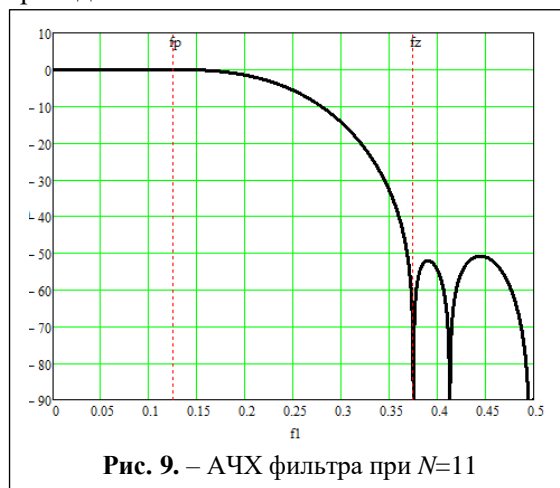


Рис. 9. – АЧХ фильтра при  $N=11$

Из рис.9 видно, что величина подавления в полосе задержания составляет более 50 дБ, что и требовалось по заданию.

На рис.10 приведен график АЧХ синтезированного по алгоритму Ремеза фильтра в полосе пропускания. Из рис. 10 видно, что неравномерность в полосе пропускания не превосходит значение 0,031 дБ, что так же превосходит требования задания.

#### Заключение

Следует отметить, что рассмотренные оптимальные методы можно использовать для синтеза КИХ-фильтров 2, 3 и 4 типов, а так же минимально-фазовых фильтров. Кроме этого, методика синтеза принципиально не изменится, если необходимо построить ФНЧ, полосовой или режекторный фильтры.

Исследование оптимальных методов синтеза выявило следующие свойства рассматриваемых методов:

1. Метод разложения в ряд Фурье аппроксимирующей функции имеет следующие достоинства:

- он является самым простым из рассматриваемых методов и для его реализации требуется меньший объем вычислений;

- при увеличении количества коэффициентов фильтра необходимо найти значения недостающих коэффициентов, рассчитанные до этого коэффициенты не изменяются;

- это единственный из рассмотренных оптимальный метод, коэффициенты фильтра в котором вычисляются аналитически.

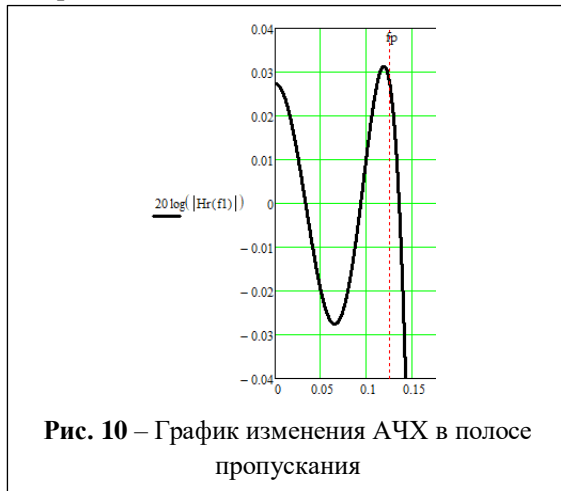


Рис. 10 – График изменения АЧХ в полосе пропускания

Основным недостатком метода является низкая из всех рассмотренных методов точность аппроксимации частотной характеристики. Поэтому его целесообразно применять при построении фильтром с большим количеством коэффициентов, когда другие методы синтеза встречают существенные вычислительные сложности.

2. Метод наименьших квадратов позволяет сформировать сложную целевую функцию, которая может учитывать дополнительные ограничения на коэффициенты фильтра. Точность аппроксимации метода наименьших квадратов существенно лучше метода разложения аппроксимирующей функции в ряд Фурье. Основным недостатком метода является возрастание объема вычислений при увеличении количества коэффициентов фильтра.

Поступила 22 июля 2021 г.

The paper provides a detailed analysis of three optimal methods for the synthesis of FIR filters: the Fourier series expansion method of the approximating function, the method of least squares and the method of equal-dimensional Chebyshev approximation implemented by the Remez algorithm.

*Key words:* Synthesis of the FIR filter, approximation, uniform (Chebyshev) criterion, RMS criterion.

*Жиганов Сергей Николаевич* – кандидат технических наук, доцент кафедры радиотехники Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

*E-mail:* s\_zh\_72@mail.ru.

*Романов Дмитрий Николаевич* – кандидат технических наук, доцент кафедры радиотехники Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

3. Алгоритм Ремеза, реализующий критерий равномерной чебышевской аппроксимации в отличие от двух других методов позволяет предварительно рассчитать порядок фильтра и в результате синтеза получить требуемые частотные характеристики фильтра. Существенным недостатком метода является итерационная процедура получения желаемой частотной характеристики, а как следствие, высокая трудоемкость, особенно существенная при больших порядках фильтра.

### Литература

1. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. – М.: Техносфера, 2006. – 856 с.
2. Солонина А.И., Улахович Д.А., Арбузов С.М., Соловьева Е.Б. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций. Изд. 2-е испр. и перераб. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 768 с.
3. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник – М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.
4. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход, 2-е издание.: пер. с англ. - М.: Издательский дом "Вильямс", 2004. - 992 с.
5. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: Второе издание. Пер. с англ. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2006. – 656 с.
6. Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Политехника, 1999. – 592 с.
7. Бондарев В.Н., Трестер Г., Чернега В.С. Цифровая обработка сигналов: методы и средства. Учеб. Пособие для вузов. 2-е изд. – Х.: Кокус, 2001. – 398 с.

*E-mail:* radon81@mail.ru.

*Жиганова Елена Александровна* – кандидат технических наук, доцент кафедры радиотехники Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

*E-mail:* zhiganova.el@gmail.com.

*Ефремов Андрей Алексеевич* – магистрант 2-го курса по направлению подготовки магистратуры 11.04.01 «Радиотехника» факультета радиоэлектроники и компьютерных систем Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

*E-mail:* mustangandrew@mail.ru.

*Адрес:* 602264, г. Муром, ул. Орловская, 23.