Информационные системы и модели

УДК 519.651

Сравнение методов аппроксимации функциональных зависимостей

Данилин С.Н., Борданов И.А., Никишов Д.А., Пантелеев С.В., Щаников С.А., Жиганов С.Н.

Статья посвящена решению вопроса поиска оптимального соотношения между допустимой погрешностью аппроксимации функций и вычислительными затратами на применяемые алгоритмы. В статье рассмотрены два класса методов: полиномы наилучшего приближения и многослойные нейронные сети прямого распространения. Для каждого из классов рассчитаны погрешность аппроксимации по критериям максимальной абсолютной ошибки и площади функции ошибок, а так же вычислительные затраты как сумма числа математических операций и запросов в память. Сравнение проведено на примере аппроксимации функции квадратного корня.

Ключевые слова: аппроксимация, полиномы наилучшего приближения, искусственные нейронные сети, погрешность.

Введение

Разработкой методов аппроксимации сложных функциональных зависимостей для их применения в различных областях человеческой деятельности занимались многие исследователи. Теоретические основы численных методов и методов аппроксимации были заложены крупнейшими учёными своего времени: И. Ньютоном, Л. Эйлером, Н.И. Лобачевским, К.Ф. Гауссом, П.Л. Чебышевым, Ш. Эрмитом, М. Сэвиджем и другими. Созданная ими математическая база развивается и поныне, предлагаются новые подходы, методы и алгоритмы.

Появление первых аналоговых, а затем цифровых вычислительных устройств, автоматизирующих процессы обработки различного рода информации, требует от исследователей разрабатывать прикладные методы аппроксимации. Одними из первых отечественных и зарубежных ученых, занимающихся внедрением названных методов в вычислительные средства являются В.Д. Байков, В.Б. Смолов, Б. Волдер, П. Безье, Р.У. Хэмминг и другие.

Важный этап в развитии теории, связан с именами Ш.Ж. Балле Пуссена, Д. Джексона, С.Н. Бернштейна, проводившими исследования связи между погрешностью приближения функций многочленами различных степеней. В работах названных ученых приведённая погрешность была равна порядка 0,1%, что недостаточно для современных радиотехнических систем. Это было вызвано тем, что применяемые алгоритмы приходилось значительно упрощать до уровня, соответствующего уровню развития вычислительной техники того периода времени.

Появление высокопроизводительных вычислительных средств обработки информации открывает ученым возможность создания новых прикладных методов аппроксимации, в основе которых лежат более сложные алгоритмы обработки информации, что позволит на несколько порядков повысить точность приближения функций. Актуальной задачей в данном научном направлении является поиск оптимального соотношения между допустимой погрешностью решения задачи и вычислительными затратами на применяемые алгоритмы.

1. Полиномиальная аппроксимация

Существующие в настоящее время методы приближения представлены в работах [1-4]. При воспроизведении функциональных зависимостей широкое применение нашел полиномиальный метод аппроксимации, который используется во многих научных и прикладных технических задачах: от приближения стандартных математических функций в современных специализированных микропроцессорах до реализации градуировочных характеристик при воспроизведении рабочих эталонов, калибровке датчиков и измерительных систем. Повсеместное распространение полиномиального метода обусловлено его простотой, наглядной геометрической интерпретацией, а главное – низкими вычислительными затратами при расчете значений функции $f(x)$ с помощью полинома

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k\,. \quad (1)$$

При использовании схемы Горнера выражение (1) можем представить в виде:

$$\varphi_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n =$$
$$= \Big(\big((a_nx + a_{n-1})x + a_{n-2}\big)x + \ldots + a_1\Big) + a_0. \quad (2)$$

Вычислительная сложность расчета полинома степени n составляет $2n$ операций: n умножений и n сложений ($n(\times) + n(+)$). Кроме того в памяти необходимо хранить $n + 1$ констант $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и запрашивать их для реализации вычисления полинома.

Существуют различные методы поиска коэффициентов полинома (2). Обобщенная теорема Чебышева определяет полином наилучшего приближения функции, когда все $n + 2$ экстремальные значения погрешностей δ_i, $i \in 0,1, \ldots, n+1$ на интервале интерполяции $x \in [a, b]$ поочередно меняют знак и равны между собой по абсолютной величине [3]. Обычно точность аппроксимации функций с помощью полученных полиномов сравнивают с полиномом наилучшего приближения.

Другой подход к нахождению коэффициентов полиномиальной функции (1), основан на минимизации площади фигуры, ограниченной сверху кривой $|(x)| = |f(x) - \varphi(x)|$, а снизу осью абсцисс на интервале аппроксимации функции [a; b]. При аппроксимации функции $f(x)$ используют полином вида (1) порядка n, найденные коэффициенты которого a_0, a_1,…, a_n обеспечивают минимум площади функции ошибок $S_{\text{ош}}$, определяемое выражением

$$S_{\text{ош}} = \int_a^b |\delta(x)|dx =$$
$$= \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx \to min. \quad (3)$$

Подобный критерий называют интегральным или минимизирующим площадь ошибки [5].

По методике, изложенной в [3] были рассчитаны коэффициенты полиномов наилучшего приближения функции $f(x) = \sqrt{x}$ на интервале значений $x \in [0; 1]$, результаты расчета основных параметров, характеризующих качество аппроксимации и требования к реализации полученных полиномов приведены в таблице 1.

2. Искусственные нейронные сети

Другим перспективным подходом к аппроксимации функциональных зависимостей является применение искусственных нейронных сетей (ИНС) [6]. В соответствии с теоремой Д. Цыбенко (универсальная аппроксимационная теорема 1989 г.) ИНС прямого распространения как минимум с одним скрытым слоем может аппроксимировать любую непрерывную функцию многих переменных с любой точностью [А1]. В данной статье для решения задачи аппроксимации применим ИНС с одним скрытым слоем. Число входов Ni=1 и число выходных нейронов No=1 соответствуют числу аргументов По теории Колмогорова-Арнольда-Хехт-Нильсена достаточное количество нейронов в скрытом слое для для решения данной задачи Nh = 2*Ni+1 = 3.

Погрешность аппроксимации для ИНС будем оценивать по тем же критериям, что и для полинома, однако их расчет проведем численно для 10000 значений входного аргумента методом трапеций. Для оценки быстродействия введем дополнительный параметр f — количество вычислений функции активации [7].

Таблица 1. Полиномы аппроксимации функции квадратного корня

№	Формулы полиномов		δ_{MM}	A+m	$S_{\text{ош}}$
0	$a_0 \neq 0$	$\varphi_0(x) = 0,5$	0,5	1	0,25
1	$a_0 \neq 0$ $a_1 = 1$	$\varphi_1(x) = 0,125 + x$	0,125	2	0,076
	$a_0 = 0$ $a_1 \neq 1$	$\varphi_1(x) = 1,207 \cdot x$	0,207	2	0,126
	$a_0 \neq 0$ $a_1 \neq 1$	$\varphi_1(x) = 0,13 + 0,961 \cdot x$	0,13	4	0,077
2	$a_0 = 0$ $a_1 \neq 1$	$\varphi_2(x) = 2,35x - 1,458x^2$	0,11	5	0,069
	$a_0 \neq 0$ $a_1 \neq 1$	$\varphi_2(x) = 0,07 + 1,869x - 0,997x^2$	0,07	7	0,039
3	$a_0 = 0$ $a_1 \neq 1$	$\varphi_3(x) = 3,497x - 5,75x^2 + 3,32x^3$	0,074	6	0,048
	$a_0 \neq 0$ $a_1 \neq 1$	$\varphi_3(x) = 0,047 + 2,82x - 4,036x^2 + 2,21x^3$	0,047	7	0,028
4	$a_0 = 0$ $a_1 \neq 1$	$\varphi_4(x) = 4,65x - 14,275x^2 + 19,77x^3 - 9,2x^4$	0,056	8	0,036
	$a_0 \neq 0$ $a_1 \neq 1$	$\varphi_4(x) = 0,034 + 3,82x - 10,41x^2 + 13,79x^3 - 6,27x^4$	0,035	9	0,022
5	$a_0 = 0$ $a_1 \neq 1$	$\varphi_5(x) = 5,8x - 28,44x^2 + 68,858x^3 - 73,2x^4 + 28,03x^5$	0,045	9	0,028
	$a_0 \neq 0$ $a_1 \neq 1$	$\varphi_5(x) = 0,027 + 4,87x - 21,67x^2 + 50,71x^3 - 52,98x^4 + 20,07x^5$	0,03	11	0,019
6	$a_0 = 0$ $a_1 \neq 1$	$\varphi_6(x) = 6,95x - 49,559x^2 + 182,65x^3 - 327,47x^4 + 278,51x^5 - 90,11x^6$	0,037	11	0,024
	$a_0 \neq 0$ $a_1 \neq 1$	$\varphi_6(x) = 0,022 + 5,85x - 37,96x^2 + 135,4x^3 - 238,7x^4 + 200,97x^5 - 64,59x^6$	0,026	12	0,017
7	$a_0 = 0$ $a_1 \neq 1$	$\varphi_7(x) = 8,12x - 79,52x^2 + 412,29x^3 - 1095,31x^4 + 1537,25x^5 - 1085,34x^6 + 303,543x^7$	0,032	12	0,02
8	$a_0 = 0$ $a_1 \neq 1$	$\varphi_8(x) = 9,21x - 117,55x^2 + 810,3x^3 - 2955,09x^4 + 6026,384x^5 - 6909,19x^6 + 4159,83x^7 - 1022,91x^8$	0,028	14	0,018
9	$a_0 = 0$ $a_1 \neq 1$	$\varphi_9(x) = 10,23x - 164,07x^2 + 1443,58x^3 - 6870,08x^4 + 18932,24x^5 - 31119,53x^6 + 30076,71x^7 - 15763,41x^8 + 3455,34x^9$	0,023	15	0,015

В процессе эксперимента будем изменять функции активации нейронов скрытого слоя: гиперболический тангенс (TanSig), логистическая функция (LogSig), полулинейная функция (ReLU), линейная с насыщением (SatLin). У выходного нейрона функция ак-

Таблица 2. ИНС аппроксимации функции квадратного корня

Функция активации нейронов скрытого слоя	δмм	A+m+f	Sош
TanSig	0,021	25 (f=3)	0,00064
LogSig	0,021	25 (f=3)	0,00067
ReLU	0,097	25 (f=3)	0,01414
SatLin	0,097	25 (f=3)	0,01377

тивации линейная. Обучение проведем в соответствии с алгоритмом Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно. Функция потерь — средний квадрат ошибок (MSE), целевое значение установлено на 10^{-8}. Сводные данные представлены в таблице 2.

Как видно из таблицы 2 ИНС обеспечивает точность аппроксимации не хуже полинома 9-й степени, при это требуя больших вычислительных затрат.

Заключение

В результате выполнения работы:

1. Приведено описание методов аппроксимации функциональных зависимостей: полиномы наилучшего приближения и ИНС.
2. Описанные методы применены для решения задачи аппроксимации функции квадратного корня.
3. Для каждого метода рассчитана погрешность и вычислительные затраты при различных значениях параметров применяемых методов.
4. Показано, что в зависимости от критериев оптимальным могут быть как классические так и нейросетевые методы и алгоритмы.
5. Результаты работы могут быть полезны как в научных исследованиях так и в инженерных применениях.

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000 г. – 624 с.
2. Вержбицкий В.М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): Учебн. пособие для ВУЗов. – М.: Высш. шк., 2001. – 382 с.
3. Chekushkin V.V., Zhiganov S.N. Computational methods in optimization of engineering problems // Raleigh, North Carolina, USA: Open Science Publishing, 2018. 202 p.
4. Чекушкин В.В., Жиганов С.Н., Михеев К.В., Быков А.А. Математическое моделирование и вычислительные алгоритмы в радиотехнических системах // Вестник Концерна ВКО «Алмаз – Антей». № 1, 2017. – С. 98-104.
5. Жиганов С.Н., Михеев К.В. Поиск полиномов Чебышева, обеспечивающих минимизацию площади ошибок // Методы и устройства передачи и обработки информации: Научно-технический журнал. – Вып. 20./ Под ред. В.В. Ромашова, В.В. Булкина. – М.: МИ ВлГУ, 2018. С. 100-102.
6. Состояние исследований в области инженерного проектирования и производства нейрокомпьютеров / С. Н. Данилин, С. А. Щаников, И. А. Борданов [и др.] // Алгоритмы, методы и системы обработки данных. – 2019. – № 1(39). – С. 14-45.
7. Кулик, С. Д. Оценка эффективности технических систем с использованием нейронных сетей / С. Д. Кулик, К. И. Ткаченко // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. – 2009. – № 9. – С. 47-60.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №19-07-01215 и Стипендии Президента РФ СП-5411.2021.5.

Поступила 18 октября 2020 г.

In the article we have tried to solve the problem of finding the balance between the permissible error of the approximation of functions and the computational costs of the algorithms used. For these purposes two classes of methods have been considered: best approximation polynomials and feed-forward multi-layer neural networks. For each ones, the approximation error is calculated according to the criteria of the maximum absolute error and the area of the error function, as well as the computational cost as the sum of the number of mathematical operations and memory requests. The comparison is carried out on the example of the approximation of the square root function.

Key words: approximation, best approximation polynomials, artificial neural networks, error.

Данилин Сергей Николаевич - кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии Муромского института (филиала) федерального государственного образовательного учреждения высшего образования "Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых".

E-mail: dsn-55@mail.ru.

Адрес: 602264, Муром, ул. Орловская, д. 23.

Борданов Илья Алексеевич - инженер кафедры информационных систем Муромского института (филиала) федерального государственного образовательного учреждения высшего образования "Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых".

E-mail: bordanov2011@yandex.ru

Адрес: 602264, Муром, ул. Орловская, д. 23.

Никишов Даниил Андреевич - инженер кафедры информационных систем Муромского института (филиала) федерального государственного образовательного учреждения высшего образования "Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых".

E-mail: daniilnikisov74@gmail.com

Адрес: 602264, Муром, ул. Орловская, д. 23.

Пантелеев Сергей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии Муромского института (филиала) федерального государственного образовательного учреждения высшего образования "Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых".

E-mail: ser-panteleev@yandex.ru

Адрес: 602264, г. Муром, ул. Орловская, 23.

Щаников Сергей Андреевич – кандидат технических наук, декан факультета информационных технологий Муромского института (филиала) федерального государственного образовательного учреждения высшего образования "Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых".

E-mail: seach@inbox.ru

Адрес: 602264, г. Муром, ул. Орловская, 23.

Жиганов Сергей Николаевич – кандидат технических наук, доцент кафедры радиотехники Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

E-mail: s_zh_72@mail.ru

Адрес: 602264, г. Муром, ул. Орловская, 23.