Информационные системы и модели

УДК 519.651

Алгоритм многомерной оптимизации, обеспечивающий поиск полиномов наилучшего приближения

Жиганов С.Н., Михеев К.В., Жиганова Е.А., Иванов Г.Б.

Рассмотрен новый подход к поиску полиномов наилучшего приближения Чебышева высоких степеней, который позволяет существенно сократить время поиска коэффициентов по сравнению с известными подходами. Метод позволяет одновременно изменять значения точек альтеранса, приближая их к оптимальным значениям, а не последовательно как в известных алгоритмах, а одновременно, существенно сокращая время расчета.

Ключевые слова: полином наилучшего приближения, аппроксимация, полиномиальные методы.

Практически все функциональные зависимости реализуются в современных вычислительных системах на основе методов приближения, когда функции заменяются простыми, понятными вычислителю операциями с заданной степенью точности. При решении этой задачи наибольшее распространение получили полиномиальные методы аппроксимации, когда функция *f*(*x*) заменяется полиномиальной функцией $\varphi(x)$ степени *n* вида [1, 2]

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k, \quad (1)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – коэффициенты полинома.

Коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ определяют различного рода полиномы – это полиномы Тейлора, Лежандра, Чебышева, Якоби и т.д. [2,3], которые обеспечивают разную точность аппроксимации функциональных зависимостей, разную степень сложности вычисления этих коэффициентов. Точность аппроксимации функциональных зависимостей этими полиномами разная, однако она мень-

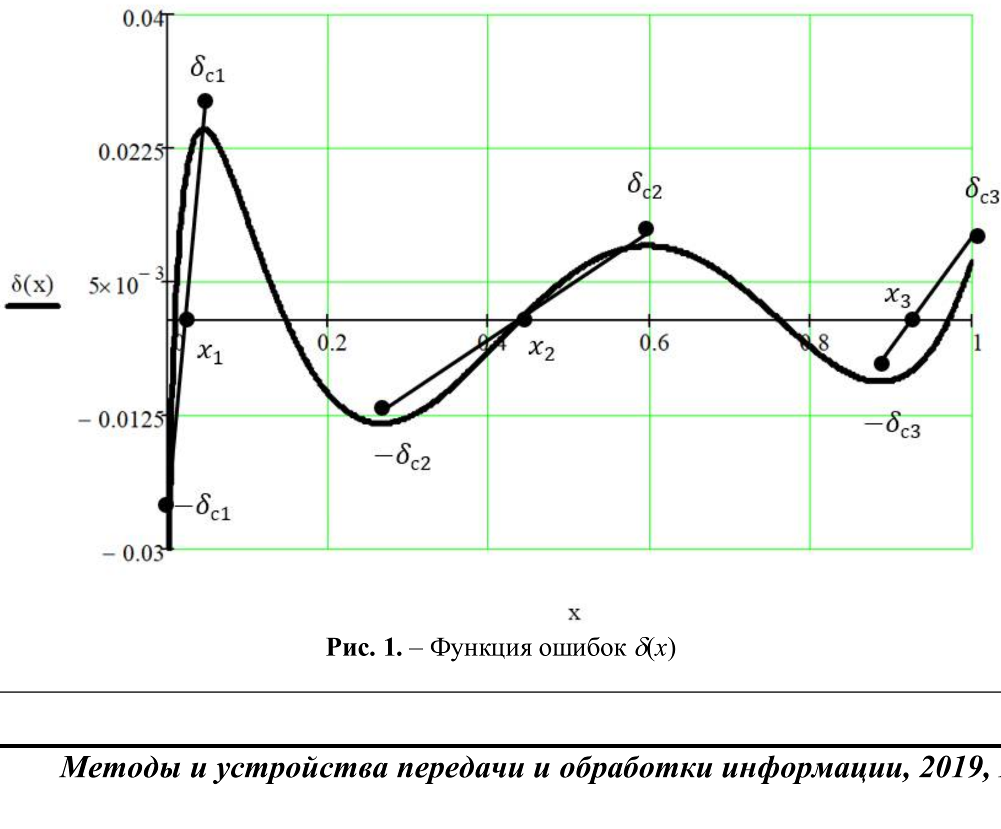

Рис. 1. – Функция ошибок $\delta(x)$

ше чем у полиномов наилучшего приближения, у которых в соответствии с обобщенной теоремой Чебышева, все $n+2$ экстремальные значения погрешностей δ_i, $i \in 0,1,\dots,n+1$ на интервале аппроксимации функции $x \in [a,b]$ поочередно меняют знак и равны между собой по абсолютной величине [4].

В настоящее время не существует общего подхода к поиску коэффициентов полиномов наилучшего приближения различных функциональных зависимостей. В работах [4–8] описывается алгоритм последовательного поиска коэффициентов полинома наилучшего приближения, который позволяет находить коэффициенты полинома последовательно, переходя от одного экстремума функции ошибок ($\delta(x) = f(x) - \varphi(x)$) аппроксимации при начально заданных коэффициентов полинома к следующему. За счет измерения значений коэффициентов выравнивая по абсолютному значению экстремумы функции ошибок. Такой подход позволяет получить значения коэффициентов полинома наилучшего приближения, однако при порядке полинома $n \geq 3$, затрачиваемое время на поиск коэффициентов растет экспоненциально.

Целью работы является разработка метода поиска коэффициентов полинома наилучшего приближения, основанного на многомерной оптимизации значений функции ошибок.

Описанный в [5-8] подход к поиску значений коэффициентов полинома основан на том, что выбираются две крайних точки (значение функции ошибок аппроксимации на краю интервала и первый экстремум), вычисляется среднее арифметическое между абсолютными значениями этих отклонений и точка пересечения функции ошибок с осью абсцисс переносится вправо или влево. Затем пересчитываются коэффициенты полинома и подобная операция проводится до тех пор, пока максимальные отклонения не сравняются. Затем переходят с двум следующим экстремальным значениям функции ошибок. Так постепенно доходят до правого края интервала. Видно, что описанный подход требует для своей реализации большого количества времени.

Описанный подход можно расширить на то, чтобы за один шаг смещать не одну точку кривой ошибок, а сразу несколько. Рассмотрим последовательность расчета коэффициентов полинома наилучшего приближения 4-го порядка на примере аппроксимации функции $f(x) = \sqrt{x}$. Алгоритм вычисления коэффициентов следующий:

1. Как и в предыдущем алгоритме предва-

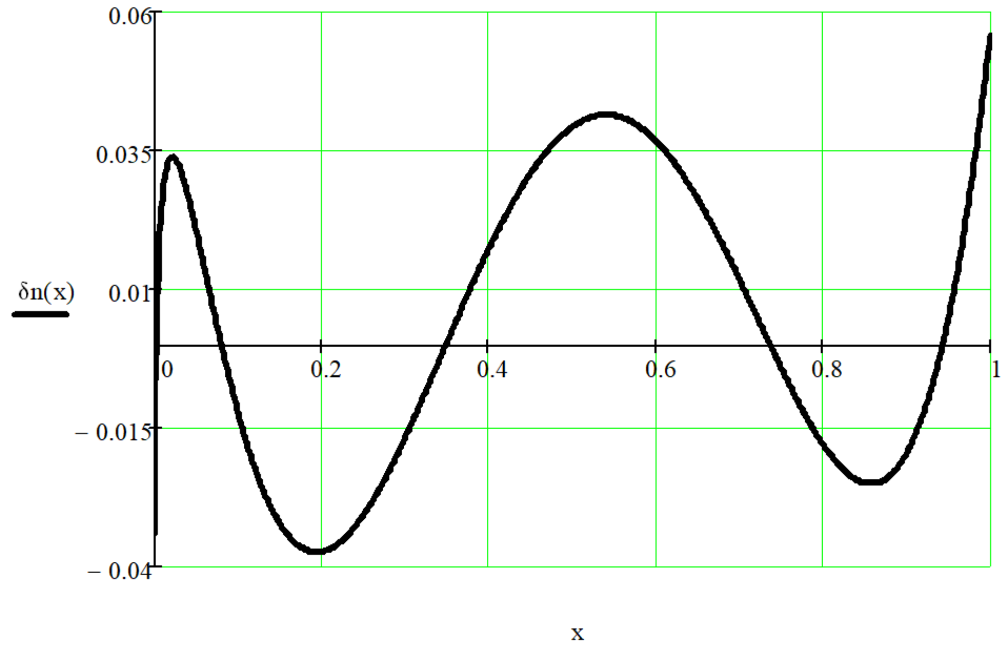

Рис. 2. – Функция ошибок $\delta(x)$ на первом шаге применения алгоритма

рительно необходимо выбрать какие-то значения коэффициентов аппроксимирующей функции. В качестве начального приближения могут выступать любые отмеченные выше полиномы. Возьмем в качестве исходного полином Чебышева 1-го рода. Полученная при этом функция ошибок $\delta(x)$ приведена на рис. 1.

2. Найдем значения функции $\delta(x)$ на краях интервала аппроксимации δ_0 и δ_5, а так же значения функции в точках экстремумов δ_1, δ_2, … δ_4. Вычислим средние арифметические между абсолютными значениями δ_i, i=0..5 по формулам

$$\delta_{c1} = \frac{|\delta_0| - |\delta_1|}{2}, \delta_{c2} = \frac{|\delta_2| - |\delta_3|}{2},$$
$$\delta_{c3} = \frac{|\delta_4| + |\delta_5|}{2}.$$

3. Отложим полученные средние значения в точках экстремумов и на краях интервалов и соединим их прямыми (см. рис. 1).

4. Находим точки пересечения построенных прямых с осью абсцисс x_1, x_2 и x_3.

5. Составляем систему уравнений, состоящую из полинома, рассчитанного в точках x_1, x_2, x_3 и на краях интервала. Приравниваем эти уравнения к значению аппроксимируемой функции в этих точках. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{0} = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 + a_4 \cdot 0^4 \\ \sqrt{x_1} = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_1^2 + a_3 \cdot x_1^3 + a_4 \cdot x_1^4 \\ \sqrt{x_2} = a_0 + a_1 \cdot x_2 + a_2 \cdot x_2^2 + a_3 \cdot x_2^3 + a_4 \cdot x_2^4 \\ \sqrt{x_3} = a_0 + a_1 \cdot x_3 + a_2 \cdot x_3^2 + a_3 \cdot x_3^3 + a_4 \cdot x_3^4 \\ \sqrt{1} = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 + a_4 \cdot 1^4 \end{cases}$$

6. Решаем эту систему, находим новые значения коэффициентов полинома a_0, a_1, a_2, a_3, a_4. Результирующая функция ошибок показана на рис.2.

Из рис. 2 видно, что значение функции $\delta(x)$ в точке x=0 уменьшилось боле чем в два раза, но при этом увеличились значения в других точках экстремумов.

7. Проводим аналогичные шагам 2 – 6 расчеты, получаем полином наилучшего приближения, аналогичный полиному, приведенному в [4]. На рис. 3 приведены графики функций ошибок для полинома Чебышева 1-го рода $\delta(x)$ и полинома наилучшего приближения $\delta n(x)$.

Применение описанного алгоритма позволило получить полином наилучшего приближения за два шага итерации, в отличии от алгоритма рассмотренного в [4-8], когда для расчета каждой точки требуется по 5-7 итерационных циклов.

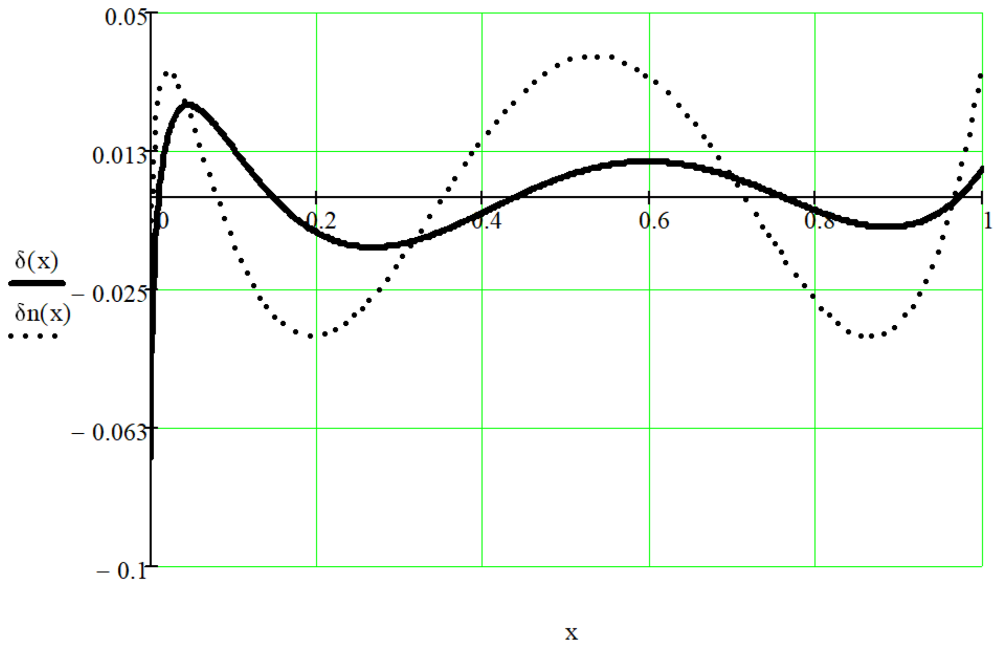

Рис. 3. – Функции ошибок $\delta(x)$ и $\delta n(x)$

Литература

1. Вержбицкий В.М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): Учебн. пособие для ВУЗов. – М.: Высш. шк., 2001. – 382 с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000 г. – 624 с.
3. Прасолов В.В. Многочлены. – 4-е изд., исправленное. – М.: МЦНМО, 2014. – 336 с.
4. Chekushkin V.V., Zhiganov S.N. Computational methods in optimization of engineering problems // Raleigh, North Carolina, USA: Open Science Publishing, 2018. 202 p.
5. Данилин С.Н., Щаников С.А., Борданов И.А., Зуев А.Д., Пантюхин Д.В., Пантелеев С.В. Состояние исследований в области инженерного проектирования и производства нейрокомпьютеров. Алгоритмы, методы и системы обработки данных. 2019. № 1 (39). С. 14-45. ISSN 2220-878X. (http://files.amisod.ru/mediacontent/vipuski/2019/1/amisod-2019-01-39-danilin-and-other.pdf.
6. Чекушкин В.В., Михеев К.В. Быстродействующие алгоритмы поиска полиномов наилучшего приближения для воспроизведения функциональных зависимостей в информационно-измерительных системах. // Измерительная техника. №4, 2016. – С.7-10.
7. Чекушкин В.В., Жиганов С.Н., Михеев К.В., Быков А.А. Математическое моделирование и вычислительные алгоритмы в радиотехнических системах // Вестник Концерна ВКО «Алмаз – Антей». № 1, 2017. – С. 98-104.
8. Чекушкин В.В., Жиганов С.Н., Михеев К.В. Улучшение методов воспроизведения тригонометрических функций в системах обработки радиолокационной информации // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. – 2019. – № 3. – С. 24–36.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 18-37-00077, № 19-07-01215 и конкурса инновационных проектов Владимирской области «УМНИК-2018».

Поступила 23 сентября 2019 г.

A new approach to searching for high-degree Chebyshev best approximation polynomials is considered, this approach significantly reduces the search time for coefficients in comparison with the known approaches. The method allows you to simultaneously change the values of the alternance points, bringing them closer to the optimal values, and not sequentially as in the known algorithms..

Key words: the polynomial of best approximation, approximation, polynomial methods.

Жиганов Сергей Николаевич – кандидат технических наук, доцент кафедры радиотехники Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

E-mail: s_zh_72@mail.ru.

Адрес: 602264, г. Муром, ул. Орловская, д. 23.

Михеев Кирилл Валерьевич – кандидат технических наук, инженер первой категории акционерного общества «Муромский завод радиоизмерительных приборов».

E-mail: kiri-mikheev@yandex.ru.

Адрес: 602267, г. Муром, Карачаровское шоссе, д. 2.

Жиганова Елена Александровна – кандидат технических наук, доцент кафедры радиотехники Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

Адрес: 602264, г. Муром, ул. Орловская, д. 23.

Иванов Георгий Борисович – студент Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

Адрес: 602264, г. Муром, ул. Орловская, д. 23.