УДК 621.396

Исследование методов аппроксимации корреляционных функций

Самарин А.А., Жиганов С.Н., Ракитин А.В.

В статье проводится анализ точности формирования случайной величины с заданной корреляционной функцией с использованием метода формирующего фильтра на основе анализа сравнения теоретической и экспериментальной корреляционной функции и фазовых портретов.

Ключевые слова: корреляционные функции, фазовый портрет, метод формирующего фильтра.

Введение

Часто при решении задач имитационного моделирования возникает необходимость в формировании процессов с заданным видом корреляционной функции. При этом не обращают внимание на закон распределения процесса. Теоретически эта задача решается методом фильтрации и сводится к определению характеристик формирующего фильтра при известных характеристиках входного и выходного сигналов [1].

В данной работе проведено исследование качества формирования случайной величины с заданной корреляционной функцией на основе метода формирующего фильтра.

Метод формирующего фильтра

Известно, что спектральная плотность мощности выходного сигнала фильтра определяется в соответствии с выражением:

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega), \qquad (1)$$

где $S(\omega)$ - спектральная плотность мощности входного сигнала; $|W(j\omega)|^2$ - квадрат модуля частотной характеристики формирующего фильтра. Учитывая, что $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ и $|W(j\omega)|^2$ - чётные функции, их можно представить в виде:

$$\begin{cases} S_x(\omega) = \varphi(j\omega)\,\varphi(-j\omega) \\ S_y(\omega) = \psi(j\omega)\,\psi(-j\omega) \\ |W(j\omega)|^2 = W(j\omega)W(-j\omega) \end{cases} \qquad (2)$$

Отсюда:

$$|W(j\omega)|^2 = \frac{\psi(j\omega)}{\varphi(-j\omega)} \qquad (3)$$

Сложность частотной характеристики формирующего фильтра $W(j\omega)$ во многом будет определяться видом $S_x(\omega)$. При использовании в качестве входного сигнала «белого» шума с $S_x(\omega) = S_0$, получим:

$$W(j\omega) = \frac{\psi(j\omega)}{\sqrt{S_0}} \qquad (4)$$

Для моделирования случайного процесса с помощью ЭВМ необходимо найти импульсную характеристику формирующего фильтра:

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{S_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \qquad (5)$$

Выходной сигнал формирующего фильтра может быть определен различными способами в зависимости от принятого способа преобразования аналогового фильтра в цифровой. Один из самых простых, но не эффективных способов в смысле временных затрат заключается в следующем:

$$Y(j) = \Delta\tau \sum_{i=0}^{N1} x(j-i)h(i), \qquad (6)$$

где $N1$ - число отсчётов импульсной характеристики, зависящее от вида корреляционной функции; $\Delta\tau$ - интервал дискретизации исследуемого процесса; $h(i) = h(i\Delta\tau)$ - значение импульсной переходной характеристики формирующего фильтра.

Значение интервала дискретизации зависит от вида корреляционной функции, значения её параметров, требуемой точности вычисления корреляционной функции δ и способа интерполяции корреляционной функции между узлами. Минимальное количество требуемых ординат импульсной переходной характеристики при линейной интерполяции и различных погрешностях восстановления корреляционной функции представлено в работе [2].

Поиски быстродействующих алгоритмов моделирования случайных величин с заданным видом корреляционной функции привели к использованию рекурсивной фильтрации [2]:

$$y_n = \sum_{i=0}^{N} a_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^{N} b_i y_{n-i}. \qquad (7)$$

Для нахождения коэффициентов a_i и b_i (т.е. параметров фильтра) применяются, в основном, три класса методов: методы преобразования аналоговых фильтров в цифровые, прямые методы расчёта цифровых фильтров в Z-плоскости и методы, использующие алгоритмы оптимизации. В общем случае невозможно отдать предпочтение какому-либо одному из них. С учётом применимости этих методов в конкретных условиях и многих других факторов, каждый из них может оказаться наиболее подходящим. Однако большинство цифровых фильтров рассчитываются методом билинейного преобразования стандартных аналоговых фильтров. Это обстоятельство связано с тем, что в задачах статистического моделирования необходимо проектировать фильтры, для которых билинейные преобразования аналоговых фильтров уже известны.

Для проверки качества генерирования случайных последовательностей представляется перспективным использование фазовых портретов [2]. Под фазовым портретом будем понимать графическую зависимость, построенную в координатах: корреляционная функция $\rho_x(\tau)$ и ее производная $\rho'_x(\tau)$.

Следует отметить, что каждому типу корреляционных функций соответствует свой, уникальный фазовый портрет. На практике при построении фазового портрета вместо значения производных корреляционных функций возможно определение её приращений на заданном интервале.

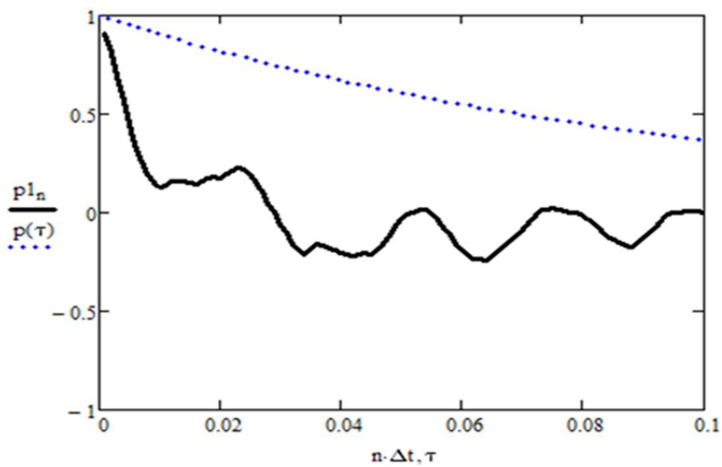

Рис 1 – Теоретическая корреляционная функция $\rho(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$ (точечная кривая) и полученная по соотношению (7) при $\sigma_x^2 = 1$ и $\alpha = 1$, и N=100

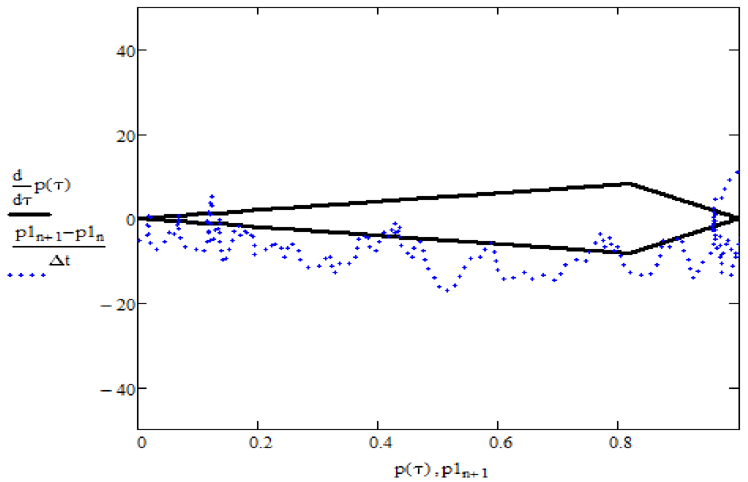

Рис. 2 – Фазовые портреты теоретической корреляционной функции $\rho(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$ (точечная кривая) и полученной по соотношению (7) при N=100

Для сравнения фазовых портретов определим квадратическую погрешность в виде:

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=0}^{Jmax}\left[\Phi_T[\rho_x(\tau_i)] - \Phi_x[\rho(\tau_i)]\right]^2}{\sum_{i=0}^{Jmax}\Phi_T^2[\rho_x(\tau_i)]}, \qquad (8)$$

где $\Phi_T[\rho_x(\tau_i)]$ - эталонный фазовый портрет.

Моделирование алгоритмов формирования случайных последовательностей чисел с заданным законом распределения

Методом статистического моделирования на ЭВМ была получена случайная последовательность чисел с использованием соотношения (7). Эталонная корреляционная функция случайной последовательности имела вид

$$\rho(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

при моделировании выбиралось $\sigma_x^2 = 1$ и $\alpha = 1$. На рис. 1 приведены графики эталонной корреляционной функции (точечная кривая) и рассчитанной (сплошная кривая) при объеме выборки $N = 100$, а на рис. 2 соответствующие фазовые портреты. Из рисунков видно, что при малом объеме выборки кривые существенно отличаются друг от друга.

Для оценки точности формирования случайной последовательности с заданной корреляционной функцией кроме квадратической погрешности (8) вычислялась ошибка формирования корреляционной функции, определяемая по формуле

$$\delta_\rho = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{Jmax}[\rho_x(\tau_i) - \rho(\tau_i)]^2}}{N}. \qquad (9)$$

В таблице 1 приведены значения рассчитанных значений δ и δ_ρ при различных значениях объема выборки.

Таблица 1.

N	100	500	1000	5000	10000	50000
δ	0,065	0,064	0,0071	0,0027	0,0011	0,00084
δ_ρ	0,054	0,006	0,0021	0,00034	0,00024	0,000095

Из таблицы 1 видно, что с увеличением выборки точность формирования корреляционной функции повышается, причем это показывает критерий (8) и (9).

Литература

1. Теория вероятностей и математическая статистика/ Н.Ш. Кремер и др.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. - 420 с.

2. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум // Самарский государственный аэрокосмический университет, 2001. 191 с 2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1998.- 368 с.

Поступила 24 сентября 2018 г.

The article analyzes the accuracy of formation of a random variable with a given correlation function using the forming filter method based on the analysis of comparison of theoretical and experimental correlation function and phase portraits.

Key words: correlation functions, phase portrait, forming filter method.

Самарин Антон Алексеевич – магистрант Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

Жиганов Сергей Николаевич – кандидат технических наук, доцент кафедры радиотехники Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

Ракитин Алексей Валерьевич – кандидат технических наук, доцент кафедры радиотехники Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

Адрес: 602264, г. Муром, ул. Орловская, д. 23.