УДК 621.396

Поиск полиномов Чебышева, обеспечивающих минимизацию площади ошибок

Жиганов С.Н., Михеев К.В.

В работе на примере полинома Чебышева третьего порядка развивается подход поиска полиномов наилучшего приближения основанный на минимизации площади ошибок при аппроксимации гармонической функции.

Ключевые слова: гармонический сигнал, полиномы Чебышева.

Введение

Нахождение различный функциональных зависимостей в современных информационно-измерительных системах основано на использовании методов аппроксимации. Один из целого ряда из них – это метод, основанный на полиномах Чебышева [1, 2], обеспечивающий наименьшие вычислительные затраты при его реализации на современных вычислительных устройствах при заданной точности. Существуют различные подходы к нахождению коэффициентов полиномов Чебышева, некоторые из них можно найти в работах [3-5]. Один из таких возможных подходов, намечен авторами в работе [6], он основан на минимизации площади ошибок на примере поиска коэффициентов полинома Чебышева третьей степени и развивается в представленной работе.

Целью работы является сравнение по точности аппроксимации гармонической функции полиномами Чебышева третьей степени, коэффициенты которых найдены по методу минимизации максимальной ошибки и по методу минимизации площади ошибок.

Описание методов расчета коэффициентов полинома Чебышева

При аппроксимации функции $f(x)$ будем использовать полином Чебышева порядка n вида

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=1}^{n} a_ix^n, \quad (1)$$

где a_0, …, a_{n+1} – коэффициенты полинома.

При вычислении коэффициентов полинома (1) в качестве $f(x)$ возьмем функцию синуса на интервале значений $x \in [0, \pi/2]$, т.е. $f(x) = \sin(x)$, а степень полинома выберем третью, т.е. $n = 3$, а

$$L_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3. \quad (2)$$

Из (2) видно, что для задания полинома необходимо определить четыре коэффициента: a_0, a_1, a_2 и a_3.

В работе [5] получен полином наилучшего приближения третьей степени, обеспечивающий значение максимальной ошибки аппроксимации $\delta_{max} = 0{,}005$ вида

$$L_3(x) = 0{,}0035 + 0{,}9794x - 0{,}1409x^3. \quad (3)$$

На рис. 1, а сплошной кривой приведен график функции $f(x) = \sin(x)$, а точечной кривой – график функции $L_3(x)$ при изменении x в диапазоне от 0 до $\pi/2$, а на рис. 1, б – график изменения ошибок аппроксимации

$$\delta(x) = f(x) - L_3(x) = \sin(x) - L_3(x). \quad (4)$$

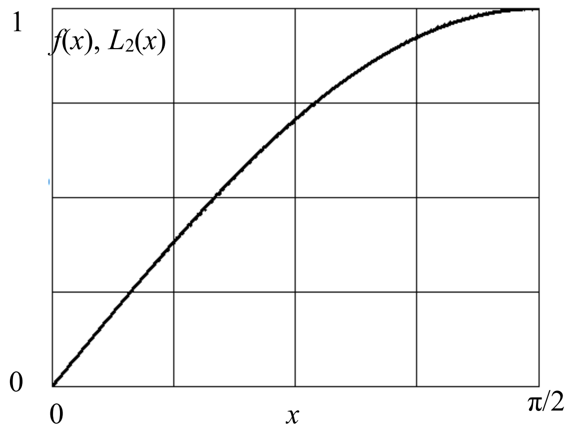
Из рис. 1, б видно, что ошибки аппроксимации не превосходят по абсолютной величине значения в 0,5%.

На рис. 1, б заштрихованная область - это площадь ошибок аппроксимации, значение которой можно определить из соотношения

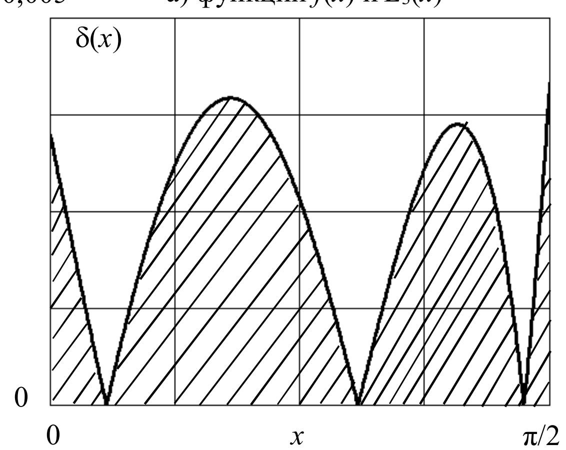
$$S = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left| f(x) - L_3(x) \right| dx = \int_{0}^{\pi/2} \left| \sin(x) - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_2x^3 \right| dx. \quad (5)$$

При использовании для аппроксимации функции полинома (3) значение площади ошибки составляет $S = 0{,}003714$

В работе [6] предложен подход для нахождения коэффициентов полинома (1) основанный на минимизации выражения (4). Суть этого подхода в следующем. Поскольку разность $f(x) - L_3(x)$ принимает положительные и отрицательные значения на интервале значений функции, то решать интеграл (5) необходимо на отдельно на подинтервалах, где эта разность положительная и где отрицательная. Результатом решения будет некоторая функция, зависящая от четырех неизвестных коэффициентов a_0, a_1, a_2 и a_3– $S(a_0, a_1, a_2, a_3)$.



а) функции $f(x)$ и $L_3(x)$



б) функция $\delta(x)$

Рис.1. Аппроксимируемая, аппроксимирующая функции и функция ошибок аппроксимации

Для нахождения значений коэффициентов, минимизирующих выражение (4) необходимо решить систему уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(a_0, a_1, a_2, a_3)}{\partial a_0} = 0 \\ \dfrac{\partial S(a_0, a_1, a_2, a_3)}{\partial a_1} = 0 \\ \dfrac{\partial S(a_0, a_1, a_2, a_3)}{\partial a_2} = 0 \\ \dfrac{\partial S(a_0, a_1, a_2, a_3)}{\partial a_3} = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Моделирование алгоритмов аппроксимации

Средствами программы MathCAD была решена система уравнений (6) для разных исходных данных. В результате получен полином вида

$$L_3(x) = -0,003 + 1,028x - 0,069x^2 - 0,115x^3 . \qquad (7)$$

Соответствующая полиному (7) кривая ошибок приведена на рис. 2, из которого видно, что максимальные ошибки наблюдаются на краях интервала аппроксимации. Значения $\delta_{max} = 0,003915$ и значение площади $S = 0,001072$.

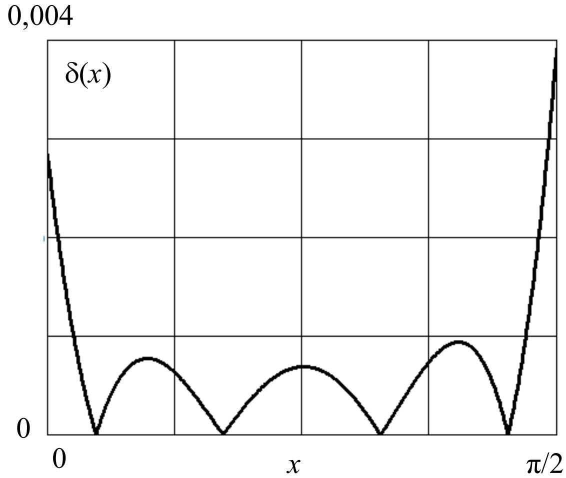


Рис.2. Кривая ошибок аппроксимации при использовании метода минимизации площади ошибки

Заключение. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что полученные полином третьего порядка позволяет получить минимальную площадь ошибки аппроксимации и при этом максимальное значение ошибки получилось меньше, чем при использовании метода минимизации максимальной ошибки при аппроксимации функции $\sin(x)$ на интервале $x \in [0, \pi/2]$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-37-00077.

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний. - 2000. – 624с.
2. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. – Киев.: Наукова Думка. - 1969. – 625 с.

3. Chekushkin V.V., Panteleev I.V., Mikheev K.V. Improving Polynomial Methods of Reconstruction of Functional Dependences in Information-Measuring Systems. Measurement Techniques July 2015, Volume 58, Issue 4, PP 385-392. ISSN 0543-1972.

4. Galushkin A.I., Danilin S.N., Shchanikov S.A. The research of memristor-based neural network components operation accuracy in control and communication systems // Source of the Document 2015 International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2015 - Proceedings. 2015. PP. 1-6. (DOI: 10.1109/SIBCON.2015.7147034)

5. Chekushkin V.V., Zhiganov S.N. Computational methods in optimization of engineering problems // Raleigh, North Carolina, USA: Open Science Publishing, 2018. 202 p.

6. Жиганов С.Н., Михеев К.В. Сравнение двух методов нахождения коэффициентов полиномов Чебышева при аппроксимации тригонометрической функции // Прикладные вопросы формирования и обработки сигналов в радиолокации, связи и акустике [Электронный ресурс]: VIII Всероссийские Армандовские чтения. / Сб. тез. докладов IX научно-практического семинара. – Муром: Изд.-полиграфический центр МИ ВлГУ, 2018. – С. 10-13.

Поступила 18 августа 2018 г.

In the example of the Chebyshev polynomial of the third order develops the approach of finding polynomials of best approximation based on minimization of square of errors in approximating harmonic functions.

Key words: harmonic signal, Chebyshev polynomials.

Жиганов Сергей Николаевич – кандидат технических наук, доцент кафедры радиотехники Муромского института (филиала) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

E-mail: s_zh_72@mail.ru.

Адрес: 602264, г. Муром, ул. Орловская, д. 23.

Михеев Кирилл Валерьевич – кандидат технических наук, инженер первой категории акционерного общества «Муромский завод радиоизмерительных приборов».

E-mail: kiri-mikheev@yandex.ru.

Адрес: 602267, г. Муром, Карачаровское шоссе, д. 2.